

**BUKU DARAS
UIN ALAUDDIN**

Wahyuni Abidin, S.Pd.,M.Pd.



MATEMATIKA DISKRIT

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
ALAUDDIN
M A K A S S A R

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) ALAUDDIN
MAKASSAR
2013**

Buku Daras :

MATEMATIKA DISKRIT

Copyright@Penulis 2013

Penulis : Wahyuni Abidin, S.Pd.,M.Pd.

Editor : Dr. Ir. Andi Suarda, M.si

Desain Cover : AU Press

Layout : Arif Ridha, S.Kom

vii + 194, 15,5 x 23 cm

Cetakan I : Desember 2013

ISBN:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

Dilarang memperbanyak seluruh atau sebagian isi buku ini tanpa izin tertulis penerbit

Alauddin University Press

Jl. Sultan Alauddin No. 63 Makassar 90221

Telp. 0823 4867 1117 – Fax. (0411) 864923

Email : au_press@yahoo.com

SAMBUTAN REKTOR

UIN ALAUDDIN MAKASSAR

(Prof. Dr. H.A. Qadir Gassing, H.T.,M.S.)

Salah satu langkah yang dilakukan oleh UIN Alauddin Makassar pasca diresmikannya pada tanggal 4 Desember 2005 adalah melakukan aktivitas konkret dan nyata untuk mewujudkan obsesi UIN sebagai pusat peradaban Islam di Indonesia Bagian Timur. Upaya yang dilakukan untuk mencapai cita-cita ini adalah dengan mengaktifkan sinerjitas antara ilmu pengetahuan umum dan agama agar supaya tidak terjadi dikotomi antara keduanya.

Langkah konkret yang dilakukan untuk tujuan di atas dimulai dengan menggagas sistem pengajaran pendampingan. Pendampingan dilakukan dengan cara mempertemukan silabi umum dan agama, memadukan dan mensenyawakan literatur umum dan agama, serta pendampingan dan persenyawaan yang dilakukan dalam diskusi-diskusi langsung di ruang kelas yang dihadiri oleh pengajar dan dosen bidang umum dan agama.

Buku ini adalah salah satu bentuk nyata dari realisasi dan pengejawantahan ide sinerjitas ilmu. Buku ini diharapkan untuk memberi kontribusi penting yang dapat melahirkan inspirasi-inspirasi serta kesadaran baru dalam rangka pengembangan keberilmuan kita sebagai bagian dari civitas akademika UIN Alauddin yang muaranya diharapkan untuk pencapaian cita-cita UIN Alauddin seperti yang disebutkan di atas. Hal ini sesuai dengan apa yang dikehendaki oleh para tokoh pendidikan muslim pasca Konferensi Pendidikan Mekkah dan pada konferensi-konferensi pendidikan setelahnya di beberapa negara.

Semoga buku ini yang juga merupakan buku daras di UIN Alauddin dapat memperoleh ridha Allah. Yang tak kalah pentingnya, buku ini juga dapat menjadi rujukan mahasiswa untuk memandu mereka memperoleh gambaran konkret dari ide sinerjitas pengetahuan agama dan umum yang marak diperbincangkan dewasa ini.

Amin Ya Rabbal-Alamin.

Makassar, September 2013

KATA PENGANTAR

Dengan mengucapkan puji syukur Alhamdulillah berkah bantuan Allah swt, akhirnya buku daras yang berjudul “Matematika Diskrit” dapat diselesaikan.

Ucapan terima kasih yang tulus ditujukan kepada suami tercinta Muhammad Ridwan, S.Si.,M.Si yang membantu dalam menyelesaikan buku daras ini. Ucapan terima kasih kepada Ermawati, S.Pd,M.Si. selaku ketua jurusan matematika fakultas sains dan teknologi yang memberiku kesempatan dalam menulis buku daras ini. Ucapan terima kasih kepada Prof. I Ketut Budayasa yang telah memberikan ilmunya kepada penulis di bangku kuliah S2 tentang matematika diskrit dan kebanyakan isi buku ini catatan penulis selama menempuh kuliah S2 program Studi Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya. Ucapan terima kasih kepada Try Azisah Nurman, S.Pd.,M.Pd membantu penulis menyelesaikan soal-soal yang ada dalam buku ini. Ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantuku dalam penulisan buku daras ini.

Penulis menyadari dalam buku daras ini masih banyak kekurangan yang terjadi. Untuk itu adanya saran dan kritik dari pembaca sangat diperlukan penulis untuk perbaikan dimasa mendatang.

Penulis

DAFTAR ISI

SAMBUTAN REKTOR	iii
KATA PENGANTAR	iv
DAFTAR ISI	v

BAB I : **FUNGSI PEMBANGKIT** ____1

Kegiatan Belajar 1

Pendahuluan	3
Definisi Fungsi Pembangkit	4
Perkalian Dua Fungsi Pembangkit	6

Kegiatan Belajar 2

Fungsi Pembangkit untuk Kombinasi	11
-----------------------------------	----

Kegiatan Belajar 3

Fungsi Pembangkit untuk Permutasi	17
-----------------------------------	----

BAB II : **RELASI REKURSIF** ____29

Kegiatan Belajar 1

Pendahuluan Relasi Rekursif	30
Relasi Rekursif Linear dengan Koefisien Konstanta	31
Relasi Rekursif Linear Homogen dengan Koefisien Konstanta	32
Menyelesaikan Relasi Rekursif Linear, Homogen, Derajat k dengan Koefisien Konstanta	33
Menyelesaikan Relasi Rekursif dengan Fungsi Pembangkit	37

BAB III :
PRINSIP INKLUSI-EKSLUSI ____49

Kegiatan Belajar 1

Pendahuluan____50

Bentuk Umum Prinsip Inklusi-Ekslusi ____54

Kegiatan Belajar 2

Banyaknya Obyek yang Memiliki Tepat M Sifat ____62

Banyaknya Obyek yang Memiliki Sifat Genap atau Ganjil ____70

BAB IV :

KONSEP DASAR PADA GRAPH ____79

Kegiatan Belajar 1

Pendahuluan____81

Pengertian Graph ____82

Jenis Graph ____83

Kegiatan Belajar 2

Istilah-Istilah dalam Graph ____87

Kegiatan Belajar 3

Graph Bagian____90

Graph Terhubung dan Komponen Graph ____91

Komplemen Graph ____92

Isomorfisme pada Graph ____93

Derajat Titik Graph ____94

BAB V :

MASALAH LINTASAN TERPENDEK ____98

Kegiatan Belajar 1

Pendahuluan____99

Jarak Dua Titik pada Graph ____101

Algoritma Dijkstra ____102

BAB VI :

GRAPH EULER DAN PERMASALAHAN TUKANG POS ____114

Kegiatan Belajar 1

Pendahuluan ____115

Pengertian Graph Euler dan Semi Euler ____116

Karakteristik Graph Euler dan Semi Euler ____116

Kegiatan Belajar 2

Algoritma Fleury ____ 121

Permasalahan Tukang Pos ____128

BAB VII :

GRAPH EULER DAN PERMASALAHAN TUKANG POS ____135

Kegiatan Belajar 1

Pendahuluan ____136

Pengertian Graph Hamilton ____137

Syarat Cukup Graph Hamilton ____139

Permasalahan Tour Optimal ____146

Algoritma Penyisipan Titik ____148

Algoritma Dua Sisi Optimal ____150

BAB VIII :

PEWARNAAN PADA GRAPH ____161

Kegiatan Belajar 1

Pewarnaan Titik pada Graph ____164

Bilangan Khromatik pada Graph ____166

Bilangan Khromatik Beberapa Kelas Graph ____167

Batas Atas Bilangan Khromatik Graph ____169

Algoritma Pewarnaan Titik pada Graph ____177

Algoritma Pewarnaan Barisan-Sederhana ____177

Algoritma Pewarnaan Barisan-Besar-Utama ____180

Aplikasi Pewarnaan Titik pada Graph ____182

Kegiatan Belajar 2

Pewarnaan Sisi pada Graph ____188

Pengklasifikasian Berdasar Indeks Khromatik Graph ____191

Aplikasi Pewarnaan Sisi pada Graph ____192

BAB I

FUNGSI PEMBANGKIT

A. GAMBARAN SINGKAT MENGENAI MATERI KULIAH

Materi kuliah ini membahas mengenai definisi fungsi pembangkit, fungsi pembangkit untuk kombinasi, fungsi pembangkit untuk permutasi.

B. PEDOMAN MEMPELAJARI MATERI

Memahami fungsi pembangkit, fungsi pembangkit untuk kombinasi, fungsi pembangkit untuk permutasi. Menerapkan dalam kehidupan sehari-hari.

C. TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat memahami definisi fungsi pembangkit biasa (FPB).
2. Mahasiswa dapat memberikan contoh fungsi pembangkit biasa.
3. Mahasiswa dapat memahami definisi fungsi pembangkit eksponensial (FPE).
4. Mahasiswa dapat memberikan contoh fungsi pembangkit eksponensial (FPE).
5. Mahasiswa dapat memahami perkalian dua fungsi pembangkit yang biasanya disebut dengan konvolusi.
6. Mahasiswa dapat menyelesaikan contoh perkalian dua fungsi pembangkit.

7. Mahasiswa dapat memahami fungsi pembangkit untuk kombinasi.
8. Mahasiswa dapat memahami fungsi pembangkit untuk permutasi.



D. KEGIATAN BELAJAR

Kegiatan Belajar 1

a. Materi Perkuliahan 1.1

Pendahuluan

Fungsi pembangkit adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah. Dengan men-*translasi* masalah ke dalam dunia fungsi pembangkit (*Generating Function*), maka kita dapat menggunakan sifat-sifat dari fungsi pembangkit sebagai jalan untuk memecahkan suatu masalah. Fungsi pembangkit memiliki banyak penggunaan seperti menyelesaikan permasalahan rekurensi, membuktikan identitas kombinatorika maupun aplikasi-aplikasi lain yang beragam. Sehingga banyak yang beranggapan bahwa fungsi pembangkit diibaratkan sebagai jembatan yang menghubungkan Matematika diskrit dan kontinu.

Perumpamaan fungsi pembangkit sebagai penghubung dapat pula kita lihat dalam sudut pandang agama Islam yaitu tugas malaikat Jibril untuk menyampaikan firman Allah SWT kepada para nabi dan rasul, sebagaimana yang dijelaskan di dalam Al Qur'an surah At Takwir ayat 19, Al Baqarah; 97 dan An Nahl; 102

إِنَّهُ لَقَوْلُ رَسُولٍ كَرِيمٍ ﴿١٩﴾

Terjemahnya:

Sesungguhnya Al Qur'an itu benar-benar firman (Allah yang dibawa oleh) utusan yang mulia (Jibril), (QS.81:19).

قُلْ مَنْ كَانَ عَدُوًّا لِجِبْرِيلَ فَإِنَّهُ نَزَّلَهُ عَلَى قَلْبِكَ بِإِذْنِ اللَّهِ مُصَدِّقًا

لِمَا بَيْنَ يَدَيْهِ وَهُدًى وَبُشْرَىٰ لِلْمُؤْمِنِينَ ﴿١٧﴾

Terjemahnya:

Katakanlah: Barang siapa yang menjadi musuh Jibril, maka Jibril itu telah menurunkannya (Al Qur'an) ke dalam hatimu dengan seizin Allah;

membenarkan apa (kitab-kitab) yang sebelumnya dan menjadi petunjuk serta berita gembira bagi orang-orang yang beriman. (QS.2:97)

قُلْ نَزَّلَهُ رُوحُ الْقُدُسِ مِنْ رَبِّكَ بِالْحَقِّ لِيُثَبِّتَ الَّذِينَ ءَامَنُوا وَهُدًى
وَبُشْرَىٰ لِلْمُسْلِمِينَ

Terjemahnya:

Katakanlah: "Ruhul Qudus (Jibril) menurunkan Al Qur'an itu dari Tuhanmu dengan benar, untuk meneguhkan (hati) orang-orang yang telah beriman, dan menjadi petunjuk serta kabar gembira bagi orang-orang yang berserah diri (kepada Allah)". (QS.16;102).

Sehingga dengan diutusnya Jibril maka masalah dan kesulitan yang di alami oleh para nabi dan rasul akan mendapat jawaban atau solusi dari Allah SWT. Seperti yang digambarkan dalam Al Qur'an surah Maryam 26 dan Ali Imran; 39.

Hal ini menunjukkan bahwa nabi dan rasul sangat membutuhkan media untuk mendapatkan jalan keluar dari Allah SWT dalam menyelesaikan suatu masalah. Dalam matematika diskrit, fungsi pembangkit salah satu media yang digunakan matematikawan dalam menyelesaikan suatu masalah.

Definisi Fungsi Pembangkit

Misalkan $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$ adalah barisan bilangan real.

Fungsi pembangkit biasa (FPB) dari barisan (a_n) di definisikan sebagai berikut:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Fungsi pembangkit Eksponensial (FPE) dari (a_n) di definisikan sebagai berikut:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

Contoh 1.1.1

Misalkan barisan (a_n) yaitu $0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots$

Tentukan : a) Fungsi pembangkit biasa (FPB)

b) Fungsi pembangkit Eksponensial (FPE)

Penyelesaian :

$$\text{a) } P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^2 a_n x^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$$

$$= 0 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 - x - x^2$$

$$= \frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2$$

$$\text{b) } P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^2 a_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=3}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

$$= 0 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x - \frac{x^2}{2!}$$

$$= e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}$$

Contoh 1.1.2

Jika $P(x) = \frac{x^2}{(1-x)^{10}}$ fungsi pembangkit eksponensial dari barisan (a_n) .

Tentukan a_n ?

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{x^2}{(1-x)^{10}} \\ &= x^2 \left(\frac{1}{1-x} \right)^{10} \\ &= x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{10+k-1}{k} x^k \\ &= x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+9}{k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+9}{k} x^{k+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-2+9}{n-2} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n+7}{n-2} n! \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

Jadi barisan (a_n) adalah $\begin{cases} \binom{n+7}{n-2} n!, & n \geq 2 \\ 0, & n \leq 1 \end{cases}$

Perkalian Dua Fungsi Pembangkit

Penjumlahan, pengurangan maupun perkalian dua fungsi pembangkit atau lebih, dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti menjumlah, mengurangkan ataupun mengalikan dua polinomial atau lebih. Dengan demikian,

Definisi 1.1.1

Jika $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, maka

- $A(x) \pm B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$
- $A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$

Apabila (a_n) , (b_n) , (c_n) adalah barisan sedemikian hingga $(c_n) = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, maka kita katakan (c_n) adalah konvolusi dari (a_n) dan (b_n) , yang ditulis $(c_n) = (a_n) \cdot (b_n)$.

Contoh 1.1.3

Jika $P(x) = \frac{e^{-3x}}{(1+2x)^7}$ adalah fungsi pembangkit eksponensial dari

barisan (a_n) .

Tentukan (a_n) ?

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \frac{e^{-3x}}{(1+2x)^7} \\
 &= e^{-3x} \frac{1}{(1+2x)^7} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3^n x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{7+n-1}{n} (-2)^n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{-3^k}{k!} \binom{7+n-k-1}{n-k} (-2)^{n-k} \right) x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{-3^k}{k!} \binom{7+n-k-1}{n-k} (-2)^{n-k} n! \right) \frac{x^n}{n!}
 \end{aligned}$$

Jadi barisan (a_n) adalah $\sum_{k=0}^n \frac{-3^k}{k!} \binom{7+n-k-1}{n-k} (-2)^{n-k} n!$

b. Latihan 1.1

1. Tulis fungsi pembangkit biasa dari barisan berikut.
 - a. $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$
 - b. $(2, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{5}, \dots)$
2. $P(x)$ adalah fungsi pembangkit eksponensial dari barisan (a_n) . Tentukan barisan (a_n) .
 - a. $P(x) = e^x + e^{4x}$
 - b. $P(x) = \frac{1}{1-4x}$
3. Carilah konvolusi dari pasang barisan berikut.
 - a. $(1, 1, 1, 1, \dots)$ dan $(1, 1, 1, 1, \dots)$
 - b. $(1, 1, 1, 1, \dots)$ dan $(0, 1, 2, 3, \dots)$

c. Rangkuman 1.1

1. Misalkan $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$ adalah barisan bilangan real. Fungsi pembangkit biasa (FPB) dari barisan (a_n) di definisikan sebagai berikut:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Fungsi pembangkit Eksponensial (FPE) dari (a_n) di definisikan sebagai berikut:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

2. Perkalian dua fungsi pembangkit

Jika $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dan $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$,

maka

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

d. Tes Formatif 1.1

1. Tuliskan fungsi pembangkit biasa dari barisan $\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}, \dots \right)$
2. Tuliskan fungsi pembangkit eksponensial dari barisan $(3, 1, 3, 1, \dots)$
3. Jika $P(x) = \frac{x^5}{1-8x}$ fungsi pembangkit biasa dari barisan (a_n) . Tentukan a_n ?
4. Jika $P(x) = e^x + e^{4x}$ adalah fungsi pembangkit eksponensial dari barisan (a_n) . Tentukan a_n ?
5. Jika $P(x) = \frac{e^{2x}}{1-x}$ adalah fungsi pembangkit eksponensial dari barisan (a_n) . Tentukan a_n ?

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 1.1

1. Misalkan Barisan $a_n = \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}, \dots \right)$, berdasarkan definisi

Fungsi Pembangkit Biasa adalah $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} x + \frac{1}{5!} x^2 + \dots \\ &= \frac{1}{x^3} \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{x^3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{x^3} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} \right) \right) \\ &= \frac{1}{x^3} \left(e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} \right) \right) \\ &= \frac{e^x}{x^3} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2!x} \end{aligned}$$

Jadi, $P(x) = \frac{e^x}{x^3} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2!x}$

2. Misalkan Barisan $a_n = (3, 1, 3, 1, \dots)$, berdasarkan definisi fungsi

pembangkit eksponensial adalah $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$.

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \\ &= 3 + x + \frac{3x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

3. Berdasarkan definisi fungsi pembangkit biasa $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,
maka :

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{x^5}{1-8x} \\ &= x^5 \left(\frac{1}{1-8x} \right) \\ &= x^5 \sum_{n=0}^{\infty} (8x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^5 x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^{n+5} = \sum_{n=5}^{\infty} 8^{n-5} x^n \end{aligned}$$

Jadi barisan dari fungsi pembangkit adalah

$$a_n = \begin{cases} 0, & n < 5 \\ 8^{n-5}, & n \geq 5 \end{cases}$$

4.
$$\begin{aligned} p(x) &= e^x + e^{4x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1+4^n) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Jadi $a_n = (1+4^n)$, $n \geq 0$

5.
$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{e^{2x}}{1-x} \\ P(x) &= \frac{1}{1-x} e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n 1 \cdot \frac{2^{(n-k)}}{(n-k)!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^n}{2^k (n-k)!} x^n
\end{aligned}$$

Jadi

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^n}{2^k (n-k)!}; \quad n \geq 0$$

Kegiatan Belajar 2

a. Materi Perkuliahan 1.2

Fungsi Pembangkit untuk Kombinasi

- Kombinasi dari k objek adalah jajaran yang urutannya tidak diperhatikan.

Misalkan :

Ada berapa cara mengambil n objek dari tiga jenis objek yang berbeda. Katakanlah a , b dan c sedemikian sehingga;

- objek a terambil paling banyak 3
- objek b terambil paling banyak 1
- objek c terambil paling banyak 2

untuk $n = 4$, diperoleh: $\{a, a, b, c\}$, $\{a, a, c, c\}$, $\{a, b, c, c\}$, $\{a, a, a, c\}$, $\{a, a, a, b\}$.

Terdapat lima cara yang berbeda mengambil empat objek dengan syarat yang ada.

Untuk $n = 5$, diperoleh: $\{a, a, a, b\}$, $\{a, a, a, c\}$, $\{a, b, c, c\}$, $\{b, c, c, c\}$, $\{a, c, c, c\}$.

Terdapat enam cara mengambil tiga huruf.

Perhatikan Ekspresi berikut:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \{(ax)^0 + (ax)^1 + (ax)^2 + (ax)^3\} \{(bx)^0 + (bx)^1\} \{(cx)^0 + (cx)^1 + (cx)^2\} \\
 &= (1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3)(1 + bx)(1 + cx + c^2x^2) \\
 &= 1 + (a + b + c)x + (a^2 + ab + ac + bc + c^2)x^2 + \\
 &\quad (a^3 + a^2b + a^2c + abc + ac^2 + bc^2)x^3 + \\
 &\quad (a^3b + a^3c + a^2bc + a^2c^2 + abc^2)x^4 + \\
 &\quad (a^3bc + a^3c^2 + a^2bc^2)x^5 + a^3bc^2x^6
 \end{aligned}$$

Jika $a = 1$, $b = 1$ dan $c = 1$ diperoleh

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6$$

atau

$$P(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(1 - x)(1 + x + x^2)$$

Contoh 1.2.1

Tentukan banyaknya cara mengambil n huruf dari huruf-huruf membentuk kata MATEMATIKA dengan syarat vokal harus terambil. Ada berapa vaktor?

Penyelesaian:

Fungsi pembangkit dari permasalahan adalah

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots) \\
 &= (x(1 + x + x^2 + \dots))^3 (1 + x + x^2 + \dots)^3 \\
 &= x^3 (1 + x + x^2 + \dots)^3 (1 + x + x^2 + \dots)^3 \\
 &= x^3 (1 + x + x^2 + \dots)^6 \\
 &= x^3 \left(\frac{1}{1-x} \right)^6 \\
 &= x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{6+k-1}{k} x^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{6+k-1}{k} x^{k+3} \\
 &= \sum_{n=3}^{\infty} \binom{n+2}{k} x^n
 \end{aligned}$$

FPB dapat digunakan untuk menentukan banyaknya cara mendistribusikan obyek-obyek yang identik ke dalam sel-sel atau kotak-kotak yang berbeda.

Contoh 1.2.2

Sebanyak n bola identik ditempatkan ke dalam k kotak yang berbeda. Tentukan peluang tidak ada kotak yang kosong.

Penyelesaian :

Misalkan,

S = himpunan semua cara menempatkan n bola yang identik ke dalam k kotak yang berbeda

A = himpunan semua cara menempatkan n bola yang identik ke dalam k kotak yang berbeda dengan tidak ada kota yang kosong.

Fungsi pembangkit untuk mencari $n(S)$ adalah :

$$\begin{aligned} P(x) &= (1 + x + x^2 + \dots)^k \\ &= \left(\frac{1}{1-x} \right)^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} x^n \end{aligned}$$

Jadi $S(n) = \binom{k+n-1}{n}, n \geq 0$

Fungsi Pembangkit untuk mencari $n(A)$ adalah

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + x^2 + x^3 + \dots)^k \\ &= (x(1 + x + x^2 + \dots))^k \\ &= x^k (1 + x + x^2 + \dots)^k \\ &= x^k \left(\frac{1}{1-x} \right)^k \\ &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} x^{k+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k + (n-k) - 1}{n-k} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-1}{n-k} x^n
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } n(A) = \begin{cases} \binom{n-1}{n-k}, & n \geq k \\ 0, & 0 \leq n < k \end{cases}$$

Sehingga peluang tidak ada kotak yang kosong adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < k \\ \frac{\binom{n-1}{n-k}}{\binom{k+n-1}{n}}, & n \geq k \end{cases}$$

b. Latihan 1.2

- Tentukan banyaknya cara memilih k huruf dari huruf-huruf C, A, N, T, I, K sedemikian hingga :
 - memuat paling sedikit satu C
 - memuat tepat satu C dan Paling banyak 5A
 - Tiap konsonan terpilih
 - Tiap vokal terpilih paling sedikit 10 dari konsonan T dan K masing-masing terpilih tidak lebih dari 20.
- Ada berapa cara mengambil 100 huruf dari huruf-huruf pembentukan kata KOMBINATORIK sedemikian hingga setiap konsonan terpilih paling banyak 20?
- Sebanyak n koin (satu mata uang) yang identik ditempatkan di dalam k kotak yang berbeda. Berapa probabilitasnya jika setiap kotak mendapatkan paling sedikit satu koin?

c. Rangkuman 1.2

1. Kombinasi dari k objek adalah jajaran yang urutannya tidak diperhatikan
2. Fungsi Pembangkit Biasa dapat digunakan untuk menentukan banyaknya cara mendistribusikan obyek-obyek yang identik ke dalam sel-sel atau kotak-kotak yang berbeda.

d. Tes Formatif 1.2

1. Tentukan banyaknya kombinasi k obyek dari n obyek yang berbeda dengan syarat :
 - a) pengulangan di perbolehkan
 - b) tanpa pengulangan
2. Tentukan banyaknya cara menempatkan k -obyek identik ke dalam n -kotak berbeda sedemikian hingga 5 kotak pertama tidak ada yang kosong dan setiap kotak yang lain berisi paling banyak 10-obyek.

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 1.2

1. Banyaknya kombinasi- k dari obyek berbeda dimana pengulangan diperbolehkan

$$\begin{aligned} \text{a. } p(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \cdot \dots \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^n \\ &= \left(\frac{1}{1-x} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \end{aligned}$$

Jadi banyaknya kombinasi- k dari obyek berbeda dimana pengulangan diperbolehkan adalah $\binom{n+k-1}{k}; n \geq 0$

- b. Fungsi Pembangkit dari Permasalahan

$$P(x) = (1+x)(1+x) \cdot \dots \cdot (1+x)$$

$$\begin{aligned}
&= (1+x)^n \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k
\end{aligned}$$

Jadi banyak kombinasi- k dari obyek berbeda tanpa pengulangan adalah $\binom{n}{k}$

2. Fungsi pembangkitnya adalah :

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x + x^2 + x^3 + \dots)^5 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})^{n-5} \\
&= x^5 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^5 \left(\frac{1-x^{11}}{1-x} \right)^{n-5} \\
&= x^5 \left(\frac{1}{1-x} \right)^5 (1-x^{11})^{n-5} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{n-5} \\
&= x^5 (1-x^{11})^{n-5} \left(\frac{1}{1-x} \right)^n \\
&= x^5 \left(\frac{1}{1-x} \right)^n (1-x^{11})^{n-5} \\
&= x^5 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n-5}{k} x^{11k} \right] \\
&= x^5 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k/11} \binom{n-5}{k/11} x^k \right] \\
&= x^5 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^k \binom{t+k-1}{k} (-1)^{k/11} \binom{t-k-5}{k/11} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^k \binom{t+k-1}{k} (-1)^{k/11} \binom{t-k-5}{k/11} x^{k+5} \\
&= \sum_{k=5}^{\infty} \sum_{t=0}^{k-5} \binom{t+k-6}{k-5} (-1)^{(k-5)/11} \binom{t-k-10}{(k-5)/11} x^k
\end{aligned}$$

Jadi, banyaknya cara menempatkan k -objek identik ke dalam n -kotak berbeda sedemikian hingga 5 kotak pertama tidak ada yang

kosong dan setiap kotak yang lain berisi paling banyak 10-objek adalah

$$= \begin{cases} \sum_{t=0}^{k-5} \binom{t+k-6}{k-5} (-1)^{(k-5)/11} \binom{t-k-10}{(k-5)/11}; & k \geq 5 \\ 0; & k < 5 \end{cases}$$

Kegiatan Belajar 3

a. Materi Perkuliahan 1.3

Fungsi Pembangkit untuk Permutasi

- Permutasi adalah jajaran dari objek yang urutannya diperhatikan.

Misalnya :

Ada berapa kata sandi dengan panjang m yang dapat dibentuk dari 3 huruf-huruf yang berbeda yaitu a, b, c sedemikian hingga

- huruf a paling banyak 3
- huruf b paling banyak 1
- huruf c paling banyak 2

untuk $n = 4$

$\{a, a, a, b\}$, banyaknya permutasinya adalah $\frac{4!}{3!!!} = 4$

$\{a, a, a, c\}$, banyaknya permutasinya adalah $\frac{4!}{3!!!} = 4$

$\{a, a, b, c\}$, banyaknya permutasinya adalah $\frac{4!}{2!!!} = 12$

$\{a, a, c, c\}$, banyaknya permutasinya adalah $\frac{4!}{2!2!} = 6$

$\{a, b, c, c\}$, banyaknya permutasinya adalah $\frac{4!}{1!!!2!} = 12$

Fungsi Pembangkit Eksponensial

$$P(x) = \left(\frac{(ax)^0}{0!} + \frac{(ax)^1}{1!} + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^3}{3!} \right) \left(\frac{(bx)^0}{0!} + \frac{(bx)^1}{1!} \right) \left(\frac{(cx)^0}{0!} + \frac{(cx)^1}{1!} + \frac{(cx)^2}{2!} \right)$$

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \left(1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2!} + \frac{a^3 x^3}{3!}\right) \left(1 + bx\right) \left(1 + cx + \frac{c^2 x^2}{2!}\right) \\
 &= 1 + \left(\frac{ax}{1!} + \frac{bx}{1!} + \frac{cx}{1!}\right)x + \left(\frac{a^2}{2!} + \frac{ab}{1!1!} + \frac{ac}{1!1!} + \frac{bc}{1!1!} + \frac{c^2}{2!}\right)x^2 + \dots + \\
 &\quad \left(\frac{a^3 b}{3!1!} + \frac{a^3 c}{3!1!} + \frac{a^2 bc}{2!1!1!} + \frac{a^2 b^2}{2!2!} + \frac{abc^2}{1!1!2!}\right)x^4 + \dots + \left(\frac{a^3 bc^2}{3!1!2!}\right)x^6
 \end{aligned}$$

Dengan memperhatikan persamaan koefisien $\frac{x^4}{4!}$, kita peroleh

$$P(x) = 1 + \dots + \left(\frac{a^3 b}{3!1!} + \frac{a^3 c}{3!1!} + \frac{a^2 bc}{2!1!1!} + \frac{a^2 b^2}{2!2!} + \frac{abc^2}{1!1!2!}\right)x^4 + \dots + \left(\frac{a^3 bc^2}{3!1!2!}\right)x^6$$

dengan $a = b = c = 1$

$$P(x) = 1 + \dots + \left(\frac{1}{3!1!} + \frac{1}{3!1!} + \frac{1}{2!1!1!} + \frac{1}{2!2!} + \frac{1}{1!1!2!}\right)x^4 + \dots + \left(\frac{a^3 bc^2}{3!1!2!}\right)x^6$$

Agar memperoleh koefisien $\frac{x^4}{4!}$

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 1 + \dots + 4! \left(\frac{1}{3!1!} + \frac{1}{3!1!} + \frac{1}{2!1!1!} + \frac{1}{2!2!} + \frac{1}{1!1!2!}\right) \frac{x^4}{4!} + \dots + 6! \left(\frac{a^3 bc^2}{3!1!2!}\right) \frac{x^6}{6!} \\
 &= 1 + \dots + \left(\frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{1!1!2!}\right) \frac{x^4}{4!} + \dots + 6! \left(\frac{a^3 bc^2}{3!1!2!}\right) \frac{x^6}{6!}
 \end{aligned}$$

Banyaknya kata sandi dengan $n = 4$ yang dibentuk dari huruf-huruf a, b, c dengan syarat $a \leq 3, b \leq 1, c \leq 2$ tidak lain adalah koefisien dari $\frac{x^4}{4!}$.

Sedangkan fungsi pembangkitnya adalah

$$P(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!}\right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)$$

Contoh 1.3.1

Ada berapa kata sandi dengan panjang n yang dapat dibentuk dari huruf-huruf dalam kata "RAHASIA" sedemikian hingga setiap kata sandi memuat huruf R.

Penyelesaian :

Fungsi Pembangkit dari Permasalahan :

$$P(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right)^4$$

$$= (e^x - 1)(e^x)^4 = e^{x+4x} - e^{4x} = e^{5x} - e^{4x}$$

Banyaknya kata sandi dengan panjang n yang dimaksud = koefisien

$$\frac{x^n}{n!} \text{ dalam } P(x) \text{ adalah } = 5^n - 4^n, n \geq 0$$

Contoh 1.3.2

Tentukan banyaknya barisan n -angka yang memuat angka "0" sebanyak ganjil, dan angka "1" sebanyak genap. Barisan yang dibentuk dari angka 0,1.

Penyelesaian :

Fungsi Pembangkit dari permasalahan yaitu :

$$P(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)$$

$$= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$$

$$= \frac{1}{4} (e^{2x} - e^{-2x})$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^n}{n!} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - (-2)^n) \frac{x^n}{n!} \right)$$

Jadi banyaknya barisan biner yang di maksud adalah :

$$\frac{1}{4}((2^n - (-2)^n)) = \begin{cases} 0, & n \text{ genap} \\ 2^{n-1}, & n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Fungsi Pembangkit Eksponensial digunakan menentukan banyaknya cara mendistribusikan obyek-obyek yang berbeda dalam sel-sel yang berbeda.

Contoh 1.3.3

Sebanyak n obyek ditempatkan ke dalam k kotak. Tentukan peluang bahwa setiap kotak mendapat paling sedikit satu obyek, jika :

- obyek-obyek yang berbeda dan kotak yang berbeda
- obyek-obyek yang berbeda dan kotak-kotak yang identik

Penyelesaian :

- S = himpunan semua cara menempatkan n obyek berbeda ke dalam k kotak yang berbeda.

A = himpunan semua cara menempatkan n obyek berbeda ke dalam k kotak yang berbeda dengan setiap kotak mendapatkan paling satu obyek.

Fungsi pembangkit untuk mencari $n(S)$ adalah

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^k \\ &= (e^x)^k \\ &= e^{kx} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Fungsi Pembangkit untuk mencari $n(A)$

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^k \\ &= (e^x - 1)^k \\ &= ((-1) + e^x)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} (-1)^t (e^x)^{k-t} \\
&= \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} (-1)^t (e^{k-t})^x \\
&= \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} (-1)^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} (e^{k-t})^n \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^k (-1)^t \binom{k}{t} (e^{k-t})^n \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$\text{Jadi } n(A) = \begin{cases} \sum_{t=0}^k (-1)^t \binom{k}{t} (e^{k-t})^n, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases}$$

Sehingga Peluang bahwa setiap kotak mendapat paling sedikit satu obyek, jika obyek-obyek yang berbeda dan kotak yang berbeda adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \begin{cases} \sum_{t=0}^k (-1)^t \binom{k}{t} \left(1 - \frac{t}{k}\right)^n, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases}$$

- b. \bar{S} = himpunan semua cara menempatkan n obyek berbeda ke dalam k kotak yang identik

\bar{A} = himpunan semua cara menempatkan n obyek berbeda ke dalam k kotak yang identik dengan setiap kotak mendapatkan paling satu obyek.

Fungsi pembangkit untuk mencari $n(\bar{S})$ adalah

$$n(\bar{S}) = \frac{n(S)}{k!} = \frac{k^n}{k!}$$

Fungsi pembangkit untuk mencari $n(\bar{A})$ adalah

$$n(\bar{A}) = \frac{n(A)}{k!} = \frac{\sum_{t=0}^k (-1)^t \binom{k}{t} (e^{k-t})^n}{k!}, \quad n \geq k$$

Sehingga Peluang bahwa setiap kotak mendapat paling sedikit satu obyek, jika obyek-obyek yang berbeda dan kotak yang identik adalah

$$P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(\overline{S})} = \begin{cases} \sum_{t=0}^k (-1)^t \binom{k}{t} (e^{k-t})^n, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases}$$

b. Latihan 1.3

1. Sebuah kata sandi yang panjangnya k dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf a, b, dan c sedemikian hingga memuat paling sedikit satu a, satu b, satu c. Ada berapa kata sandi yang dapat dibentuk?
2. Tentukan banyak barisan n -angka yang memuat
 - a. angka "1" paling sedikit satu
 - b. angka "0" sebanyak bilangan genap dan angka "1" paling sedikit satu
 - c. angka "1" sebanyak bilangan ganjil dan angka "0" sebanyak bilangan genap
 - d. angka "1" sebanyak bilangan genap
3. Tentukan banyak cara menempatkan n orang yang berbeda di dalam 100 kamar berbeda sedemikian hingga
 - a. tidak ada kamar kosong
 - b. tiap kamar berisi paling sedikit satu dan paling banyak dua orang.

c. Rangkuman 1.3

1. Permutasi adalah jajaran dari objek yang urutannya diperhatikan.
2. Fungsi Pembangkit Eksponensial digunakan menentukan banyaknya cara mendistribusikan obyek-obyek yang berbeda dalam sel-sel yang berbeda.

d. Tes Formatif 1.3

1. Tentukan banyaknya barisan ternair n -angka yang memuat :
 - a. angka "0" sebanyak ganjil dan angka "1" sebanyak genap
 - b. angka "0" dan "1" masing-masing sebanyak bilangan genap dan "2" sebanyak ganjil.
 - c. Angka "0", "1" dan "2" masing-masing sebanyak bilangan genap.
 - d. Angka "0" , "1", dan "2" masing-masing sebanyak bilangan ganjil.
2. Tentukan banyaknya barisan Quartenair n -angka yang memuat
 - a. angka "0" dan "1" masing-masing genap dan angka "2" dan "3" sebanyak ganjil
 - b. angka "1" paling sedikit satu dan angka-angka yang lain masing-masing sebanyak bilangan ganjil.

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 1.3

1. Banyaknya barisan ternair n -angka yang memuat:
 - a. angka "0" sebanyak ganjil dan angka "1" sebanyak genap yaitu

Fungsi pembangkitnya adalah:

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right) \left(\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \right) e^x \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} - e^{-2x}) e^x \\ &= \frac{1}{4} (e^{3x} - e^{-x}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot 3^n \cdot \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} (3^n - (-1)^n) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Jadi Banyaknya barisan ternair n-angka yang memuat angka "0" sebanyak ganjil dan angka "1" sebanyak genap yaitu

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}(3^n + 1), & n \text{ Ganjil} \\ \frac{1}{4}(3^n - 1), & n \text{ Genap} \end{cases}$$

- b. Angka "0" dan "1" masing-masing sebanyak bilangan genap dan "2" sebanyak ganjil.

Fungsi pembangkitnya adalah:

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)^2 \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2 \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right) \\ &= \frac{1}{8}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})(e^x - e^{-x}) \\ &= \frac{1}{8}(e^{3x} - e^x + 2e^x - 2e^{-x} + e^{-x} - e^{-3x}) \\ &= \frac{1}{8}(e^{3x} + e^x - e^{-x} - e^{-3x}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot 3^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} (-1)^n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} (-3)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} (3^n + 1 - (-1)^n - (-3)^n) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Jadi Banyaknya barisan ternair n-angka yang memuat Angka "0" dan "1" masing-masing sebanyak bilangan genap dan "2" sebanyak ganjil. yaitu

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}(3^n + 1), & n \text{ Ganjil} \\ 0, & n \text{ Genap} \end{cases}$$

- c. Angka "0", "1" dan "2" masing-masing sebanyak bilangan genap.

Fungsi Pembangkitnya adalah

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \right)^3 \\
 &= \left(\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \right)^3 \\
 &= \frac{1}{8} (e^{3x} + 3e^{2x}e^{-x} + 3e^xe^{-2x} + e^{-3x}) \\
 &= \frac{1}{8} (e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x}) \\
 &= \frac{1}{8} e^{3x} + \frac{3}{8} e^x + \frac{3}{8} e^{-x} + \frac{1}{8} e^{-3x} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} (3)^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{8} (1)^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{8} (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} (-3)^n \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} (3^n + 3 + 3(-1)^n + (-3)^n) \frac{x^n}{n!}
 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya barisan ternair n -angka yang memuat Angka "0", "1" dan "2" masing-masing sebanyak bilangan genap adalah

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} (3^n + 3), & n \text{ Genap} \\ 0, & n \text{ Ganjil} \end{cases}$$

- d. Angka "0", "1", dan "2" masing-masing sebanyak bilangan ganjil

Fungsi Pembangkitnya :

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \right)^3 \\
 &= \left(\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right)^3 \\
 &= \frac{1}{8} (e^{3x} - 3e^{2x}e^{-x} + 3e^xe^{-2x} - e^{-3x})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} (e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}) \\
&= \frac{1}{8} e^{3x} + \frac{3}{8} e^x + \frac{3}{8} e^{-x} + \frac{1}{8} e^{-3x} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} (3)^n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{8} (1)^n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{8} (-1)^n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} (-3)^n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} (3^n - 3 + 3(-1)^n - (-3)^n) \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

Jadi banyaknya barisan ternair n -angka yang memuat Angka "0", "1" dan "2" masing-masing sebanyak bilangan ganjil adalah :

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} (3^n + 3), & n \text{ Ganjil} \\ 0; & n \text{ Genap} \end{cases}$$

2. Angka "0" dan "1" masing-masing genap dan angka "2" dan "3" sebanyak ganjil
 - a. angka "0" dan "1" masing-masing genap dan angka "2" dan "3" sebanyak ganjil

Fungsi pembangkitnya:

$$\begin{aligned}
P(x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)^2 \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \right)^2 \left(\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right)^2 \\
&= \frac{1}{16} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \\
&= \frac{1}{16} (e^{4x} - 2e^{2x} + 1 + 2e^{2x} - 4 + 2e^{-2x} + 1 - 2e^{-2x} + e^{-4x}) \\
&= \frac{1}{16} (e^{4x} - 2 + e^{-4x}) \\
&= \frac{1}{16} (e^{4x} + e^{-4x}) - \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16} (4)^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16} (-4)^n \cdot \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{8} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16} (4^n + (-4)^n) \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Jadi banyaknya barisan quartenair n angka yang dimaksud

$$\text{adalah;} \begin{cases} \frac{1}{8} (4^n) & ; n \text{ genap} \\ 0 & ; n \text{ ganjil} \end{cases}$$

- b. Angka "1" paling sedikit satu dan angka-angka yang lain masing-masing sebanyak bilangan ganjil.

Fungsi Pembangkitnya;

$$\begin{aligned}
P(x) &= \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \right)^3 \\
&= (e^x - 1) \left(\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right)^3 \\
&= \frac{1}{8} (e^x - 1) (e^{3x} - 3e^{2x} \cdot e^{-x} + 3e^x \cdot e^{-2x} - e^{-3x})^3 \\
&= \frac{1}{8} (e^x - 1) (e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}) \\
&= \frac{1}{8} (e^{4x} - 3e^{2x} + 3 - e^{-2x} - e^{3x} + 3e^x - 3e^{-x} + e^{-3x}) \\
&= \frac{1}{8} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \cdot \frac{x^n}{n!} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{x^n}{n!} + 3 - \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \cdot \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot \frac{x^n}{n!} \right. \\
&\quad \left. + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \cdot \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{8} (4^n - 3(2^n) - (-2^n) - 3^n + 3(-1^n) + (-3^n)) \frac{x^n}{n!} + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Jadi banyaknya barisan quartenair n angka yang dimaksud

$$\text{adalah, } \begin{cases} \frac{1}{8}(4^n - 4 \cdot 2^n + 3^n) & ; n \text{ genap} \\ \frac{1}{8}(4^n - 2 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n) & ; n \text{ ganjil} \end{cases}$$



BAB II

RELASI REKURSIF

A. GAMBARAN SINGKAT MENGENAI MATERI KULIAH

Materi kuliah ini membahas mengenai relasi rekursif linear derajat k , relasi rekursif linear homogen dengan koefisien konstanta, menyelesaikan relasi rekursif linear, homogen, derajat k dengan koefisien konstanta, menyelesaikan relasi rekursif dengan fungsi pembangkit.

B. PEDOMAN MEMPELAJARI MATERI

Memahami relasi rekursif linear derajat k , relasi rekursif linear homogen dengan koefisien konstanta, menyelesaikan relasi rekursif linear, homogen, derajat k dengan koefisien konstanta, menyelesaikan relasi rekursif dengan fungsi pembangkit. Kemudian menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan relasi rekursif linear derajat k , relasi rekursif linear homogen dengan koefisien konstanta, menyelesaikan relasi rekursif linear, homogen, derajat k dengan koefisien konstanta, menyelesaikan relasi rekursif dengan fungsi pembangkit.

C. TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat mengetahui bentuk umum dari suatu relasi rekursif linear berderajat k
2. Mahasiswa dapat mengetahui bentuk umum bagian rekursif dari suatu relasi rekursif linear berderajat k
3. Mahasiswa dapat menyelesaikan relasi rekursif linear, homogen, derajat k dengan koefisien konstanta
4. Mahasiswa dapat menyelesaikan relasi rekursif dengan fungsi pembangkit.

D. KEGIATAN BELAJAR

Kegiatan Belajar 1

a. Materi Perkuliahan 2.1

Pendahuluan Relasi Rekursif

Relasi dalam Matematika adalah hubungan antara dua buah elemen himpunan, hubungan ini bersifat abstrak dan tidak perlu memiliki arti apapun, baik secara konkret maupun secara matematis. Relasi rekursif sering juga disebut sebagai relasi berulang. Relasi ini mendefinisikan sebuah barisan dengan memberikan nilai ke- n yang dikaitkan dengan suku-suku sebelumnya. Untuk mendefinisikan sebuah barisan, relasi berulang memerlukan nilai awal yang sudah ditentukan. Allah SWT berfirman dalam Al Qur'an Surah Al Hijr ayat 87;

وَلَقَدْ ءَاتَيْنَاكَ سَبْعًا مِّنَ الْمَثَانِي وَالْقُرْءَانَ الْعَظِيمَ

Terjemahnya:

Dan sesungguhnya Kami telah berikan kepadamu tujuh ayat yang dibaca berulang-ulang dan Al Quran yang agung. (QS.15;87)

Ahli tafsir menafsirkan bahwa tujuh ayat yang dibaca berulang-ulang adalah surah Al Faatihah yang terdiri dari tujuh ayat. Sebagaimana telah diketahui bahwa Al Faatihah adalah pembukaan dalam Al Qur'an dimana ayat-ayat pada surah Al Faatihah erat kaitannya dengan surah-surah lain dalam Al Qur'an.

Relasi yang berulang dapat pula dilihat pada serangkaian nabi dan rasul yang diutus oleh Allah SWT. Dimana rasul pertama sekaligus manusia pertama yaitu nabi Adam As sampai rasul terakhir yaitu nabi Muhammad Saw membawa pesan (ajaran) yang saling terkait. Semua nabi dan rasul diutus kepada umatnya (QS. 3:164) untuk menyampaikan pesan agar manusia hanya menyembah kepada Allah SWT (QS. 51:56) sesuai dengan tujuan manusia diciptakan.

لَقَدْ مَنَّ اللَّهُ عَلَى الْمُؤْمِنِينَ إِذْ بَعَثَ فِيهِمْ رَسُولًا مِّنْ أَنفُسِهِمْ يَتْلُوا عَلَيْهِمْ
آيَاتِهِ ۖ وَيُزَكِّيهِمْ وَيُعَلِّمُهُمُ الْكِتَابَ وَالْحِكْمَةَ وَإِن كَانُوا مِن قَبْلُ لَفِي

ضَلَالٍ مُّبِينٍ ﴿١٦٤﴾

Terjemahnya:

Sungguh Allah telah memberi karunia kepada orang-orang yang beriman ketika Allah mengutus di antara mereka seorang rasul dari golongan mereka sendiri, yang membacakan kepada mereka ayat-ayat Allah, membersihkan (jiwa) mereka, dan mengajarkan kepada mereka Al Kitab dan Al Hikmah. Dan sesungguhnya sebelum (kedatangan Nabi) itu, mereka adalah benar-benar dalam kesesatan yang nyata. (QS. Ali Imran:164)

Banyak permasalahan dalam matematika dapat dimodelkan ke dalam bentuk relasi rekursif. Sebagai ilustrasi barisan bilangan Fibonacci (1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89, . . .). Misalkan F_n menyatakan suku ke- n dari barisan tersebut. Untuk $n \geq 3$, suku ke- n dari barisan adalah jumlah dua suku di depan bilangan tersebut. Sehingga relasi rekursif untuk F_n dapat ditulis sebagai berikut:

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3$$

Bilangan Fibonacci diperkenalkan oleh Fibonacci pada tahun 1202 yang terinspirasi dari kelinci yang berkembang biak. Makhhluk hidup dijadikan berkembang biak di muka bumi ini telah dijelaskan.

Relasi Rekursif Linear dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum bagian rekursif dari suatu relasi rekursif linear berderajat k adalah sebagai berikut:

$$a_n + h_1(n)a_{n-1} + h_2(n)a_{n-2} + \dots + h_k(n)a_{n-k} = f(n) \quad (2.1.1)$$

dimana $h_i(n)$ dan $f(n)$ adalah fungsi dalam n dan $h_k(n) \neq 0$.

Jika $f(n) = 0$ maka relasi rekursif (2.1.1) disebut dengan homogen, jika $f(n) \neq 0$ maka relasi rekursif (2.1.1) disebut dengan non homogen.

Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$, $h_i(n) = \text{konstanta}$, maka relasi rekursifnya (2.1.1) disebut relasi rekursif dengan koefisien konstanta.

Contoh 2.1.1

1. Barisan Fibonacci, suku ke- n adalah

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3$$

adalah relasi rekursif dengan linear homogen berderajat dua dengan koefisien konstanta.

2. Deransem n obyek adalah

$$D_0 = 1, \quad D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad n \geq 1$$

adalah relasi rekursif linier nonhomogen berderajat satu dengan koefisien non konstanta.

3. $a_n a_0 + a_{n-1} a_1 + a_{n-2} a_2 + \dots + a_0 a_n = 0$

adalah relasi rekursif nonlinear karena ada perkalian a dengan a .

Relasi Rekursif Linear Homogen dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum dari relasi rekursif linear homogen dengan koefisien konstanta adalah sebagai berikut:

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} = 0; \quad c_k \neq 0 \quad (2.1.2)$$

dengan k kondisi awal, dan untuk $1 \leq i \leq k$, $c_i = \text{konstanta}$.

Teorema 2.1.1 (Prinsip Superposisi)

Jika $g_1(n)$ dan $g_2(n)$ berturut-turut solusi dari relasi rekursif dari

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = f_1(n) \quad (2.1.3)$$

dan

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = f_2(n) \quad (2.1.4)$$

Maka sebarang konstanta \hat{c}_1 dan \hat{c}_2 , kombinasi linear

$\hat{c}_1 g_1(n) + \hat{c}_2 g_2(n)$ adalah solusi dari

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} = \hat{c}_1 g_1(n) + \hat{c}_2 g_2(n) \quad (2.1.5)$$

Bukti :

Karena $g_1(n)$ dan $g_2(n)$ berturut-turut adalah solusi dari (2.1.3) dan (2.1.4) maka

$$g_1(n) + c_1 g_1(n-1) + c_2 g_1(n-2) + \dots + c_k g_1(n-k) = f_1(n)$$

dan

$$g_2(n) + c_1 g_2(n-1) + c_2 g_2(n-2) + \dots + c_k g_2(n-k) = f_2(n)$$

$$\begin{aligned} \text{Jika } a_n &= \hat{c}_1 g_1(n) + \hat{c}_2 g_2(n) \text{ maka } a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} \\ &= (\hat{c}_1 g_1(n) + \hat{c}_2 g_2(n)) + c_1 (\hat{c}_1 g_1(n-1) + \hat{c}_2 g_2(n-1)) + \dots + \\ &\quad c_k (\hat{c}_1 g_1(n-k) + \hat{c}_2 g_2(n-k)) \\ &= \hat{c}_1 \{g_1(n) + c_1 g_1(n-1) + c_2 g_1(n-2) + \dots + c_k g_1(n-k)\} + \\ &\quad \hat{c}_2 \{g_2(n) + c_1 g_2(n-1) + c_2 g_2(n-2) + \dots + c_k g_2(n-k)\} \\ &= \hat{c}_1 f_1(n) + \hat{c}_2 f_2(n) \end{aligned}$$

Teorema 2.1.2

Jika $g_1(n), g_2(n), \dots, g_t(n)$ solusi dari relasi rekursif

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} = 0 \quad (2.1.6)$$

Maka $\hat{c}_1 g_1(n) + \hat{c}_2 g_2(n) + \dots + \hat{c}_t g_t(n)$ solusi dari persamaan (2.1.6)

Menyelesaikan Relasi Rekursif Linear, Homogen, Derajat k dengan Koefisien Konstanta

Bentuk Umum:

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = 0 \quad (2.1.7)$$

dengan k syarat awal

$$a_0 = p_0; \quad a_1 = p_1; \quad \dots, a_{k-1} = p_{k-1}$$

Langkah penyelesaian:

Misalkan $a_n = x^n; x \neq 0$ dari bagian rekursif $f(x)$ didapat

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_k x^{n-k} = 0$$

Bagi kedua ruas dengan x^{n-k} diperoleh

$$x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \dots + c_k = 0 \quad (2.1.8)$$

Persamaan (2.1.8) disebut persamaan karakteristik dari relasi rekursif.

Misalkan akar-akar persamaan karakteristik x_1, x_2, \dots, x_k .

Kasus I: akar-akar persamaan karakteristik berbeda

Berdasarkan teorema 2 untuk sebarang konstanta $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_k$.

$$\hat{c}_1 x_1^n + \hat{c}_2 x_2^n + \dots + \hat{c}_k x_k^n = a_n$$

adalah penyelesaian dari persamaan (2.1.7). Dengan demikian solusi umum dari relasi rekursif (2.1.7) adalah

$$a_n = \widehat{c}_1 x_1^n + \widehat{c}_2 x_2^n + \dots + \widehat{c}_t x_k^n \quad (2.1.9)$$

Dari syarat awal diperoleh

$$\text{Jika } a_0 = p_0 \text{ maka } \widehat{c}_1 + \widehat{c}_2 + \dots + \widehat{c}_k = p_0$$

$$\text{Jika } a_1 = p_1 \text{ maka } \widehat{c}_1 x_1 + \widehat{c}_2 x_2 + \dots + \widehat{c}_k x_k = p_1$$

$$\text{Jika } a_2 = p_2 \text{ maka } \widehat{c}_1 x_1^2 + \widehat{c}_2 x_2^2 + \dots + \widehat{c}_k x_k^2 = p_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\text{Jika } a_{k-1} = p_{k-1} \text{ maka } \widehat{c}_1 x_1^{k-1} + \widehat{c}_2 x_2^{k-1} + \dots + \widehat{c}_k x_k^{k-1} = p_{k-1}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan di atas kita menggunakan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_k^2 \\ \vdots & & & & \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & x_3^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{c}_1 \\ \widehat{c}_2 \\ \widehat{c}_3 \\ \vdots \\ \widehat{c}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix}$$

Karena x_1, x_2, \dots, x_k berbeda maka dapat ditunjukkan $\det(A) \neq 0$ sehingga A^{-1} ada. Jadi $\widehat{C} = A^{-1}P$, sehingga diperoleh $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$.

Dengan demikian solusi dari relasi rekursif adalah

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + c_3 x_3^n + \dots + c_k x_k^n$$

Kasus II:

Teorema 2.1.3

Jika x_1 akar persamaan karakteristik rangkap t , maka solusi umum relasi rekursif yang melibatkan x_1 saja adalah :

$$\widehat{c}_1 x_1^n + \widehat{c}_2 n x_1^n + \widehat{c}_3 n^2 x_1^n \dots + \widehat{c}_t n^{t-1} x_1^n$$

Contoh 2.1.2

Selesaikan relasi rekursif berikut

$$F_0 = 1; \quad F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad n \geq 2$$

Penyelesaian

Misalkan $F_n = x^n$; $x \neq 0$

Dari bagian rekursif diperoleh

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Akar-akar karakteristik $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, jadi 2 akar karakteristik yang berbeda. Jadi solusi umum relasi rekursif adalah

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

C_1 dan C_2 adalah sebarang konstanta.

Jadi jika C_1 dan C_2 diganti sebarang konstanta didapatkan banyak F_n .
Dari syarat awal diperoleh:

$$C_1 + C_2 = 1 \quad (i)$$

$$C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \quad (ii)$$

Dari persamaan (i) diperoleh:

$$C_1 = 1 - C_2 \quad (iii)$$

Sehingga (iii) disubstitusi pada persamaan (ii)

$$(1 - C_2) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) C_2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) C_2 = 1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} \right) C_2 = 1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{2\sqrt{5}}{2} \right) C_2 = 1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \sqrt{5}C_2 = 1$$

$$C_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

$$C_1 = 1 - C_2$$

$$= 1 - \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$= \frac{10 - (5 - \sqrt{5})}{10}$$

$$= \frac{(5 + \sqrt{5})}{10}$$

Jadi solusi dari relasi rekursif adalah

$$F_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Contoh 2.1.3

Selesaikan relasi rekursif berikut :

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + 5a_{n-2} + 3a_{n-3}; \quad n \geq 3$$

Penyelesaian :

$$\text{Misal } a_n = x^n; \quad x \neq 0$$

Dari bagian relasi rekursif diperoleh:

$$x^n = x^{n-1} + 5x^{n-2} + 3x^{n-3}$$

$$x^n - x^{n-1} - 5x^{n-2} - 3x^{n-3} = 0$$

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$(x-3)(x+1)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = -1 \quad (\text{rangkap})$$

Jadi akar-akar persamaan kuadrat 3 dan -1 (rangkap 2)

Solusi umum relasi rekursif :

$$a_n = c_1 3^n + c_2 (-1)^n + c_3 n(-1)^n$$

Dengan syarat awal :

$$c_1 + c_2 = 0 \quad (\text{i})$$

$$3c_1 - c_2 - c_3 = 1 \quad (\text{ii})$$

$$9c_1 + c_2 + 2c_3 = 1 \quad (\text{iii})$$

Dari persamaan (i) diperoleh

$$c_2 = -c_1 \quad (\text{iv})$$

Substitusi persamaan (iv) pada (ii) dan (iii), sehingga diperoleh

$$4c_1 - c_3 = 1 \quad (\text{v})$$

$$8c_1 + 2c_3 = 1 \quad (\text{vi})$$

Persamaan (v) dan (vi) dieliminasi sehingga diperoleh

$$c_1 = \frac{3}{16}$$

Dari persamaan (i) diperoleh

$$c_2 = -c_1$$

$$c_2 = -\frac{3}{16}$$

Selanjutnya c_1 dan c_2 disubstitusi pada persamaan (ii), sehingga diperoleh

$$c_3 = -\frac{1}{4}$$

Jadi solusi relasi relasi adalah

$$a_n = \frac{3}{16} 3^n - \frac{3}{16} (-1)^n - \frac{1}{4} n(-1)^n$$

Menyelesaikan Relasi Rekursif dengan Fungsi Pembangkit

Apabila tidak homogen berarti teknik yang di atas tidak bisa digunakan maka untuk menyelesaikan bisa pakai kombinasi tapi terlalu panjang maka kita bisa pakai fungsi pembangkit.

Contoh 2.1.4

Selesaikan Relasi Rekursif

$$a_n = 2a_{n-1} + 3^n \quad n \geq 1$$

$$a_0 = 1$$

Penyelesaian:

$$\text{Misalkan } P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} \quad (\text{i})$$

Langkah pertama kalikan kedua ruas dari bagian rekursif dengan x^n

$$a_n x^n = (2a_{n-1} + 3^n) x^n$$

Kemudian dijumlahkan untuk $n \geq 1$ diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n \quad (\text{ii})$$

Dari pemisalan di atas $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, maka persamaan (ii) di atas diubah menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 x^0 = 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n - (3x)^0$$

$$P(x) - 1 = 2xP(x) + \frac{1}{1-3x} - 1$$

$$P(x) = 2xP(x) + \frac{1}{1-3x}$$

$$P(x) - 2xP(x) = \frac{1}{1-3x}$$

$$(1-2x)P(x) = \frac{1}{1-3x}$$

$$P(x) = \frac{1}{(1-3x)(1-2x)}$$

$$= \frac{A}{(1-3x)} + \frac{B}{(1-2x)}$$

$$= \frac{3}{(1-3x)} - \frac{2}{(1-2x)}$$

$$= 3 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n$$

Jadi :

$$a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

Contoh 2.1.5

Selesaikan relasi rekursif dengan fungsi pembangkit eksponensial

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n ; \quad n \geq 1$$

$$D_0 = 1$$

Penyelesaian:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

Kalikan $\frac{x^n}{n!}$ setiap ruas kemudian jumlahkan untuk $n \geq 1$ sehingga diperoleh:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} nD_{n-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

b. Latihan 2.1

- Selesaikan relasi rekursif berikut dengan metode akar karakteristik.
 - $a_1 = a_2 = 1 ; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$
 - $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2 ; a_n = 9a_{n-1} - 15a_{n-2} + 7a_{n-3}, n \geq 3$
- Misal a_n menyatakan banyaknya cara untuk menempatkan n objek berbeda di dalam 5 kotak. Tulis dan selesaikan relasi rekursif untuk a_n .
- Selesaikan relasi rekursif berikut dengan fungsi pembangkit.
 - $a_1 = 3; a_{n-1} = 2a_n + 4^n, n \geq 0$
 - $a_0 = 2; a_n = a_{n-1} + n(n-1), n \geq 1$
 - $a_0 = 2; a_n = a_{n-1} + n(n-1), n \geq 1$

4. Gambarlah n buah garis lurus pada bidang datar, sedemikian hingga setiap pasang garis berpotongan di satu titik. Bila b_n menyatakan banyaknya daerah yang terbentuk, maka tulis dan selesaikan relasi rekursifnya.
5. sebanyak n buah lingkaran digambar pada sebuah bidang datar sedemikian hingga setiap dua lingkaran berpotongan di dua titik yang berbeda dan tidak ada tiga lingkaran berpotongan di satu titik. Banyaknya daerah yang terbentuk dilambangkan dengan R_n .
 - a. Tulis relasi rekursif untuk R_n
 - b. Carilah formula untuk R_n

c. Rangkuman 2.1

1. Bentuk umum bagian rekursif dari suatu relasi rekursif linear berderajat k adalah

$$a_n + h_1(n)a_{n-1} + h_2(n)a_{n-2} + \dots + h_k(n)a_{n-k} = f(n)$$
 dimana $h_i(n)$ dan $f(n)$ adalah fungsi dalam n dan $h_k(n) \neq 0$.
2. Bentuk umum dari relasi rekursif linear homogen dengan koefisien konstanta adalah sebagai berikut:

$$a_n + c_1a_{n-1} + \dots + c_ka_{n-k} = 0; \quad c_k \neq 0$$
 dengan k kondisi awal, dan untuk $1 \leq i \leq k$, $c_i = \text{konstanta}$.

d. Tes Formatif 2.1

1. Selesaikan relasi rekursif berikut dengan metode akar karakteristik.
 - a. $a_0 = 0, a_1 = -1$; $a_n = 7a_{n-1} + 12a_{n-2}$, $n \geq 2$
 - b. $a_0 = a_1 = 1$; $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $n \geq 2$
 - c. $a_1 = 2, a_2 = 6$; $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$, $n \geq 3$
2. Sebuah tangga memiliki n buah anak tangga, saudara diminta menaiki tangga tersebut dengan aturan sebagai berikut: setiap kali melangkah, saudara diperbolehkan "melangkah" satu atau dua anak tangga sekaligus.

- b. jika b_n menyatakan banyaknya cara yang berbeda saudara dapat menaiki tangga dengan n anak tangga tersebut, tulis relasi rekursif untuk b_n .
- c. Selesaikan relasi rekursif pada soal a.
3. Selesaikan relasi rekursif berikut dengan fungsi pembangkit.
- a. $a_0 = 0; a_{n+1} = a_n + n + 7, n \geq 0$
- b. $a_0 = 2, a_1 = 1; a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n, n \geq 0$

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 2.1

1. a. $a_n = 7a_{n-1} + 12a_{n-2}, n \geq 2$

$$a_0 = 0, a_1 = -1$$

Misalkan $a_n = x^n, x \neq 0$

Dari bagian relasi diperoleh:

$$x^n = 7x^{n-1} + 12x^{n-2}$$

$$x^n - 7x^{n-1} - 12x^{n-2} = 0 \quad (\text{bagi } x^{n-2})$$

$$x^2 - 7x - 12 = 0$$

$$(x-3)(x+4) = 0$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = -4$$

Karena $x_1 \neq x_2$, sehingga solusi umumnya adalah

$$a_n = 3^n c_1 + (-4)^n c_2$$

Dengan syarat awal :

$$a_0 = 0 \rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad \dots\dots\dots(i)$$

$$a_1 = -1 \rightarrow 3c_1 + (-4)c_2 = -1 \quad \dots\dots\dots(ii)$$

$$\text{Dari (i) diperoleh } c_1 = -c_2 \quad \dots\dots\dots(iii)$$

Substitusi c_2 pada (ii) diperoleh

$$3(-c_2) + (-4)c_2 = -1$$

$$-3c_2 + (-4)c_2 = -1$$

$$c_2 = -1$$

Substitusi c_2 pada (iii) diperoleh

$$c_1 = -(-1) = 1$$

Berarti solusi dari relasi rekursif adalah

$$a_n = 3^n + 4^n$$

b. $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, n \geq 2$

$$a_0 = a_1 = 1$$

Misalkan $a_n = x^n, x \neq 0$

Dari bagian relasi diperoleh:

$$x^n = 2x^{n-1} + 3x^{n-2}$$

$$x^n - 2x^{n-1} - 3x^{n-2} = 0 \quad (\text{bagi } x^{n-2})$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = -1$$

Karena $x_1 \neq x_2$, sehingga solusi umumnya adalah

$$a_n = 3^n c_1 + (-1)^n c_2$$

Dengan syarat awal :

$$a_0 = 1 \rightarrow c_1 + c_2 = 1 \quad \dots\dots\dots(i)$$

$$a_1 = 1 \rightarrow 3c_1 - c_2 = 1 \quad \dots\dots\dots(ii)$$

Jika persamaan (i) dan (ii) dieliminasi kita peroleh

$$4c_1 = 2$$

$$c_1 = 1/2$$

Substitusi c_1 pada (i) diperoleh

$$c_2 = 1 - 1/2 = 1/2$$

Berarti solusi dari relasi rekursif adalah

$$a_n = \frac{1}{2} 3^n + \frac{1}{2} (-1)^n$$

c. $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0, n \geq 3$

$$a_1 = 2, a_2 = 6$$

Misalkan $a_n = x^n, x \neq 0$

Dari bagian relasi diperoleh:

$$x^n - 4x^{n-1} + 4x^{n-2} = 0 \quad (\text{bagi } x^{n-2})$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)(x-2) = 0$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = 2$$

Karena $x_1 = x_2$, sehingga solusi umumnya adalah

$$a_n = 2^n c_1 + n \cdot 2^n c_2$$

Dengan syarat awal :

$$a_1 = 2 \rightarrow 2c_1 + 2c_2 = 2$$

$$c_1 + c_2 = 1 \quad \dots\dots\dots(i)$$

$$a_2 = 6 \rightarrow 4c_1 + 8c_2 = 6 \quad \dots\dots\dots(ii)$$

Jika persamaan (i) dan (ii) dieliminasi kita peroleh

$$c_2 = 1/2$$

Nilai c_2 kita substitusi pada persamaan (i) diperoleh

$$c_1 = 1/2$$

Berarti solusi dari relasi rekursif adalah

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n + \frac{1}{2} n 2^n$$

$$a_n = 2^{n-1} (1 + n)$$

2. (a) b_n = banyaknya cara yang berbeda menaiki tangga dengan melangkah satu atau dua anak tangga sekaligus.

Berarti ada dua kemungkinan kasus:

1. Jika kita menaiki tangga sebanyak n anak tangga dengan melangkah satu anak tangga maka anak tangga yang belum di naiki sebanyak $(n - 1)$ anak tangga. Sehingga banyaknya cara menaiki n anak tangga dengan syarat langkah pertama melangkah 2 anak tangga adalah b_{n-1}
2. Jika kita menaiki tangga sebanyak n anak tangga dengan melangkah dua anak tangga maka anak tangga yang belum di naiki sebanyak $(n - 2)$ anak tangga. Sehingga banyaknya cara menaiki n anak tangga dengan syarat langkah pertama melangkah 2 anak tangga adalah b_{n-2}

Sehingga banyaknya cara menaiki anak tangga sebanyak n adalah

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}; \quad n \geq 2$$

$$b_0 = 1, b_1 = 1$$

- (b). Misalkan $b_n = x^n$; $x \neq 0$

Dari bagian rekursif diperoleh

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Akar-akar karakteristik $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, jadi 2

akar karakteristik yang berbeda. Jadi solusi umum relasi rekursif adalah

$$b_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

C_1 dan C_2 adalah sebarang konstanta.

Jadi jika C_1 dan C_2 diganti sebarang konstanta didapatkan banyak b_n . Dari syarat awal diperoleh:

$$aC_1 + C_2 = 1 \quad (i)$$

$$C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \quad (ii)$$

Dari persamaan (i) diperoleh:

$$C_1 = 1 - C_2 \quad (iii)$$

Sehingga (iii) disubstitusi pada persamaan (ii)

$$(1 - C_2) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) C_2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) C_2 = 1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} \right) C_2 = 1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{2\sqrt{5}}{2} \right) C_2 = 1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \sqrt{5} C_2 = 1$$

$$C_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

$$C_1 = 1 - C_2$$

$$= 1 - \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$= \frac{10 - (5-\sqrt{5})}{10}$$

$$= \frac{(5+\sqrt{5})}{10}$$

Jadi solusi dari relasi rekursif adalah

$$b_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

3. (a). $a_0 = 0; a_{n+1} = a_n + n + 7, n \geq 0$

Persamaan relasi rekursifnya adalah

$$a_{n+1} = a_n + n + 7, n \geq 0$$

$$a_0 = 0$$

Misalkan $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Kalikan kedua ruas bagian rekursif dengan x^n kemudian dijumlahkan untuk $n \geq 0$ diperoleh:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + n + 7) x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 7 x^n$$

$$\sum_{n+1=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} = P(x) + \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{7}{(1-x)}$$

$$\frac{1}{x} p(x) = P(x) + \frac{x + 7(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$\frac{1-x}{x} p(x) = \frac{x+7(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$p(x) = \frac{x^2 7x(1-x)}{(1-x)^3}$$

$$p(x) = \frac{-6x^2}{(1-x)^3} + \frac{7x}{(1-x)^3}$$

$$p(x) = -6x^2 \left(\frac{1}{(1-x)} \right)^3 + 7x \left(\frac{1}{(1-x)} \right)^3$$

$$p(x) = -6x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k-1}{k} x^k + 7x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k-1}{k} x^k$$

$$p(x) = -6 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{k} x^{k+2} + 7 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{k} x^{k+1}$$

$$p(x) = -6 \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{n-2} x^n + 7 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+1}{n-1} x^n$$

$$p(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(-6 \binom{n}{n-2} + 7 \binom{n+1}{n-1} \right) x^n + \sum_{n=1}^1 7 \binom{n+1}{n-1} x^n$$

Jadi =

$$a_n = \begin{cases} 0, & n=0 \\ -6 \binom{n}{n-2} + 7 \binom{n+1}{n-1}; & n \geq 2 \\ 7 \binom{n+1}{n-1}; & n=1 \end{cases}$$

b. persamaan rekursifnya adalah :

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$$

$$a_0 = 2, a_1 = 1$$

$$\text{Misalkan } P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Kalikan kedua ruas bagian rekursif dengan x^n kemudian dijumlahkan untuk $n \geq 0$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n) x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \\
 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \\
 \left(x^{-2} \sum_{n+2=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} - a_0 x^0 - a_1 x^1 \right) - \left(2x^{-1} \sum_{n+1=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} - a_0 x^0 \right) + p(x) &= \frac{1}{1-2x} \\
 (x^{-2} p(x) - 2 - x) - (2x^{-1} p(x) - 2) + p(x) &= \frac{1}{1-2x} \\
 p(x) (x^{-2} - 2x^{-1} + 1) &= \frac{1}{1-2x} + x \\
 p(x) \left(\frac{1}{x^2} - 2 \frac{1}{x^1} + 1 \right) &= \frac{1+x(1-2x)}{1-2x} \\
 \left(\frac{1-2x+x^2}{x^2} \right) p(x) &= \frac{1+x-2x^2}{1-2x} \\
 \left(\frac{(x-1)^2}{x^2} \right) p(x) &= \frac{(x-1)(-2x-1)}{1-2x} \\
 p(x) &= \frac{(1+2x)x^2}{(1-2x)(x-1)} \\
 p(x) &= \frac{(x^2+2x^3)}{(1-2x)(x-1)} \\
 p(x) &= (x^2+2x^3) \left(\frac{1}{(1-2x)} \cdot \frac{1}{(x-1)} \right) \\
 p(x) &= (x^2+2x^3) \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \\
 p(x) &= (x^2+2x^3) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n 2^k x^n \right) \\
 p(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n 2^k x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n 2^{k+1} x^{n+3} \right)
 \end{aligned}$$

Jadi:

$$a_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^n 2^k + \sum_{k=0}^n 2^{k+1}, & n \geq 3 \\ \sum_{k=0}^n 2^k; & n = 2 \\ 0; & n = 0 \end{cases}$$



BAB III

PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

A. GAMBARAN SINGKAT MENGENAI MATERI KULIAH

Materi kuliah ini membahas mengenai bentuk umum prinsip inklusi-eksklusi, banyak objek yang memiliki tepat M sifat, banyaknya objek yang memiliki sifat sebanyak genap dan ganjil.

B. PEDOMAN MEMPELAJARI MATERI

Memahami bentuk umum prinsip inklusi-eksklusi, banyak objek yang memiliki tepat M sifat, banyaknya objek yang memiliki sifat sebanyak genap dan ganjil. Kemudian menerapkan prinsip inklusi-eksklusi dalam kehidupan sehari-hari.

C. TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat mengetahui prinsip inklusi-eksklusi
2. Mahasiswa dapat mengetahui bentuk umum prinsip inklusi-eksklusi.
3. Mahasiswa dapat menyelesaikan soal-soal tentang prinsip inklusi eksklusi
4. Mahasiswa dapat menerapkan prinsip inklusi-eksklusi dalam kehidupan sehari-hari.

D. KEGIATAN BELAJAR

Kegiatan Belajar 1

a. Materi Perkuliahan 3.1

Pendahuluan

Himpunan didefinisikan sebagai kumpulan objek yang berbeda. Sekumpulan objek yang berbeda sangat banyak disebutkan dalam Al Qur'an misalnya kumpulan binatang, burung, manusia yang sesat, manusia yang diberi petunjuk, malaikat dan lain-lain. Adapun ayat-ayat Al Qur'an yang dimaksud adalah;

QS. Al An'aam ayat 38,

وَمَا مِنْ دَابَّةٍ فِي الْأَرْضِ وَلَا طَائِرٍ يَطِيرُ بِجَنَاحَيْهِ إِلَّا أُمَمٌ أَمْثَالُكُمْ ۚ مَا فَرَّطْنَا فِي الْكِتَابِ مِنْ شَيْءٍ ثُمَّ إِلَىٰ رَبِّهِمْ يُحْشَرُونَ ﴿٣٨﴾

Terjemahnya:

Dan tiadalah binatang-binatang yang ada di bumi dan burung-burung yang terbang dengan kedua sayapnya, melainkan umat-umat (juga) seperti kamu. Tiadalah Kami alpakan sesuatu pun di dalam Al Kitab, kemudian kepada Tuhanlah mereka dihimpunkan. (QS.6:38).

QS. Ali Imran ayat 90,

إِنَّ الَّذِينَ كَفَرُوا بَعْدَ إِيمَانِهِمْ ثُمَّ أَزْدَادُوا كُفْرًا لَّنْ تَقْبَلَ تَوْبَتُهُمْ وَأُولَٰئِكَ هُمُ الضَّالُّونَ ﴿٩٠﴾

Terjemahnya:

Sesungguhnya orang-orang kafir sesudah beriman, kemudian bertambah kekafirannya, sekali-kali tidak akan diterima tobatnya; dan mereka itulah orang-orang yang sesat. (QS.3;90)

QS. Al Haqqah ayat 17,

وَالْمَلَكُ عَلَى أَرْجَائِهَا وَيَحْمِلُ عَرْشَ رَبِّكَ فَوْقَهُمْ يَوْمَئِذٍ ثَمَنِيَّةٌ ﴿١٧﴾

Terjemahnya:

Dan malaikat-malaikat berada di penjuru-penjuru langit. Dan pada hari itu delapan orang malaikat menjunjung Arasy Tuhanmu di atas (kepala) mereka. (QS. 69;17)

Ayat-ayat tersebut di atas adalah tiga ayat diantara sekian banyak ayat yang menyebutkan kumpulan objek (dalam matematika di abstraksikan sebagai himpunan). Pada QS. Al An'aam ayat 38 menyebutkan kumpulan binatang yang ada di bumi dan kumpulan burung yang terbang menggunakan sayapnya. Jika P adalah notasi himpunan yang menyatakan kumpulan binatang yang ada di bumi dan Q adalah notasi himpunan yang menyatakan kumpulan burung yang terbang menggunakan sayapnya. Maka penggalan QS. Al An'aam ayat 38 dapat ditulis dalam notasi matematika menjadi $P \cap Q$.

Pada QS. Ali Imran ayat 90, menyatakan himpunan orang kafir (sesat) setelah beriman. Sedangkan pada QS. Al Haqqah ayat 17 menyatakan himpunan malaikat menjunjung Arasy Allah. Dengan penjelasan QS. Al Haqqah ayat 17 dapat pula kita tentukan bilangan kardinal dari himpunan malaikat tersebut.

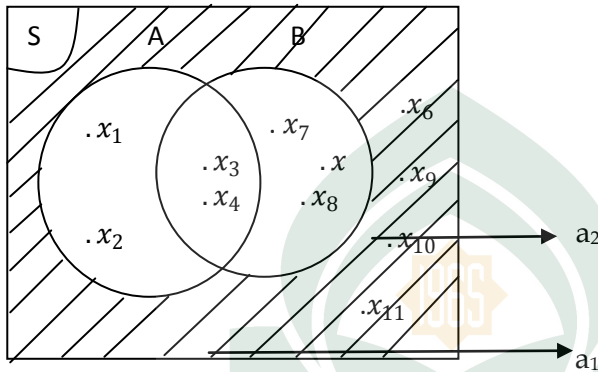
Dalam teori himpunan, kita sering kali hendak menghitung jumlah anggota-anggota himpunan yang berelasi (tidak saling bebas). Suatu cara yang sering dipakai untuk menghitung adalah aturan Inklusi-Eksklusi.

Misalkan S adalah suatu himpunan dari N objek, dan a_1, a_2, \dots, a_3 adalah sifat-sifat yang mungkin dimiliki oleh objek-objek yang ada di S . sebuah objek di S mungkin saja memiliki beberapa (bisa nol) sifat dari sifat-sifat yang ada. Banyaknya objek S yang mempunyai sifat a_1 dilambangkan dengan $N(a_1)$, sedangkan $N(a_1')$ menyatakan banyaknya objek S yang tidak memiliki sifat a_1 . Dengan demikian

$$N = N(a_1) + N(a_1')$$

Selanjutnya $N(a_i a_j)$ menyatakan banyaknya objek S yang memiliki sifat a_i dan a_j , dan $N(a_i' a_j')$ menyatakan banyaknya objek yang tidak memiliki sifat a_i maupun a_j . Begitu pula, $N(a_i' a_j)$ menyatakan banyaknya objek yang tidak memiliki sifat a_j tetapi bukan sifat a_i . secara umum $N(a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{ik})$ adalah banyaknya objek S yang memiliki sifat-sifat $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{ik}$.

Contoh 3.1.1



$$N = |S|$$

$$N(a_1) = |A| = 4$$

$$N(a_2) = |B| = 5$$

$$N(a_1 a_2) = |A \cap B| = 2$$

$$N(a_1 a_2') = |\{x_1, x_2\}| = |A \cap B^c| = 2$$

$$N(a_1' a_2) = |\{x_5, x_7, x_8\}| = |A^c \cap B| = 3$$

$$N(a_1' a_2') = |\{x_6, x_9, x_{10}, x_{11}\}| = |A^c \cap B^c| = |(A \cup B)^c| = 4$$

Dapat ditunjukkan bahwa :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} |(A \cup B)^c| &= |S| - |A \cup B| \\ &= |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) \end{aligned}$$

$$= |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

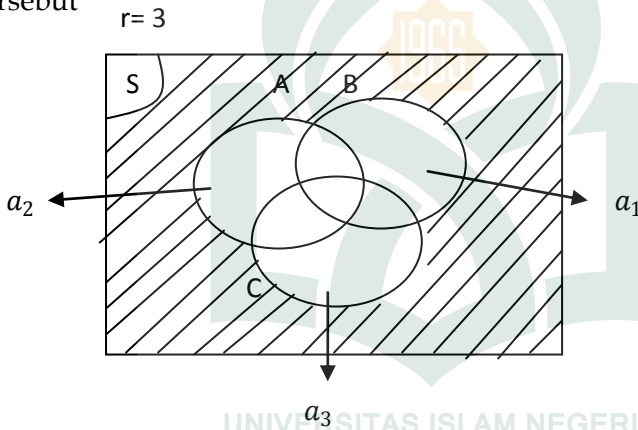
Dengan demikian banyaknya objek di S yang tidak memiliki sifat a_1 dan a_2 adalah

$$N(a_1', a_2') = N - N(a_1) - N(a_2) + N(a_1 a_2)$$

Contoh 3.1.2

Siswa sebuah kelas gemar olah raga. Sebagian ada yang gemar sepak bola, basket, dan voli. Sebagian ada yang gemar basket, sepak bola. Sebagian ada yang gemar sepak bola dan voli. Sebagian ada yang gemar basket dan voli. Berapa siswa yang tidak gemar ketiganya ?

Dengan Prinsip Inklusi-Eksklusi dapat menjawab permasalahan tersebut



Yang ditanyakan berapa siswa yang tidak gemar ketiganya artinya yang ditanyakan adalah $N(a_1' a_2' a_3')$ atau $|(A \cup B \cup C)'|$

Dapat ditunjukkan bahwa,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} |(A \cup B \cup C)'| &= |S| - |A \cup B \cup C| \\ &= |S| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & |A \cap B \cap C| \\
 &= |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - \\
 & \quad |A \cap B \cap C|
 \end{aligned}$$

Jadi :

$$\begin{aligned}
 |(A \cup B \cup C)'| &= |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + \\
 & \quad |B \cap C| - |A \cap B \cap C| \text{ atau} \\
 N(a_1' a_2' a_3') &= N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) + N(a_1 a_2) + N(a_1 a_3) + N(a_2 a_3) - \\
 & \quad N(a_1 a_2 a_3)
 \end{aligned}$$

Bentuk umum Prinsip Inklusi-Eksklusi

Secara umum prinsip inklusi-eksklusi dapat dituliskan sebagai berikut :

Teorema 3.1.2 : Prinsip inklusi-eksklusi

Jika N adalah banyaknya objek dalam himpunan S dan $a_1 a_2 \dots a_r$ sifat-sifat yang mungkin oleh suatu objek di S , maka banyaknya objek di S yang tidak memiliki sifat $a_1 a_2 \dots a_r$ adalah

$$\begin{aligned}
 N(a_1' a_2' \dots a_r') &= N - \sum_i N(a_i) + \sum_{i,j} N(a_i a_j) - \sum_{i,j,k} N(a_i a_j a_k) \dots + \\
 & \quad (-1)^t \sum N(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_t}) + (-1)^r N(a_1 a_2 \dots a_r)
 \end{aligned}$$

Bukti :

Ruas kiri dari teorema 3.1.2 yaitu $N(a_1' a_2' \dots a_r')$ menyatakan banyak objek di S yang tidak memiliki sifat $a_1 a_2 \dots a_r$.

Untuk menunjukkan bahwa ruas kiri = ruas kanan dalam teorema di atas, cukup ditunjukkan bahwa : setiap objek yang tidak memiliki sifat a_1 , sifat a_2 , ... ataupun sifat a_r tepat dihitung sekali dalam menghitung ruas kanan; dan setiap objek yang memiliki paling sedikit satu sifat, dihitung sebanyak nol kali dalam menghitung ruas kanan dari teorema di atas.

Teorema di atas sama dengan menyatakan bahwa :

$$N(a_1' a_2' \dots a_r') = N - \sum_i N(a_i) + \sum_{i,j} N(a_i a_j) - \sum_{i,j,k} N(a_i a_j a_k) \\ + \dots + (-1)^p \sum N(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p}) + \\ (-1)^{p+1} \sum N(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{p+1}}) + \dots + \\ (-1)^r N(a_1 a_i \dots a_r)$$

ambil sebarang x yang merupakan anggota S . Disini berarti terjadi dua kemungkinan atau terdapat 2 kasus yaitu:

- 1) x tidak memiliki sifat dari r sifat yang ada
- 2) x tidak memiliki sifat dari x sifat yang ada (misalnya x memiliki p sifat dengan $1 \leq p \leq r$)

Kasus 1 :

Karena x tidak memiliki sifat dari ke- r sifat yang ada di S berarti untuk pada ruas kiri x dihitung 1 kali dan untuk ruas kanan x pada N dihitung 1 kali, x pada $\sum_i N(a_i)$ tidak dihitung, x pada $\sum_i N(a_i a_j)$ tidak dihitung sampai x pada $N(a_1 a_i \dots a_r)$ tidak dihitung. Jadi ruas kiri sama dengan ruas kanan

Kasus 2:

Karena x memiliki p sifat dari r -sifat yang ada berarti pada ruas kiri x tidak dihitung.

Untuk ruas kanan:

- x pada $N(a_i)$ mungkin saja dihitung dan mungkin juga tidak dihitung sehingga dalam menghitung $\sum_i N(a_i)$, x dihitung sebanyak $\binom{p}{1}$ kali.
- x pada $N(a_i a_j)$ mungkin saja dihitung dan mungkin juga tidak dihitung sehingga dalam menghitung $\sum_i N(a_i a_j)$, x dihitung sebanyak $\binom{p}{2}$ kali.

- x pada $N(a_{1i} a_{i2} \dots a_{ip})$ mungkin saja dihitung dan mungkin juga tidak dihitung sehingga dalam menghitung $\sum N(a_{1i} a_{i2} \dots a_{ip})$ x dihitung sebanyak $\binom{p}{p}$ kali.
- x pada $N(a_{1i} a_{i2} \dots a_{i(p+1)})$ tidak dihitung.
- x pada $N(a_1 a_2 \dots a_r)$ tidak dihitung.

Sehingga untuk ruas kanan, secara formula dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 &= N - \sum_i N(a_i) + \sum_{i,j} N(a_i a_j) - \sum_{i,j,k} N(a_i a_j a_k) + \dots \\
 &\quad + (-1)^p \sum N(a_{1i} a_{i2} \dots a_{ip}) + (-1)^{p+1} \sum N(a_{1i} a_{i2} \dots a_{ip+1}) + \dots \\
 &\quad + (-1)^r N(a_1 a_2 \dots a_r) \\
 &= 1 - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \dots + (-1)^p \binom{p}{p} + 0 + 0 \\
 &= 1 - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \dots + (-1)^p \binom{p}{p} \\
 &= \binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \dots + (-1)^p \binom{p}{p} \\
 &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k \\
 &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^k
 \end{aligned}$$

Catatan:

$$\begin{aligned}
 (1+x)^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^k = (1+(-1)^p) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k \\
 0 &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^k
 \end{aligned}$$

Contoh 3.1.3:

Ada beberapa bilangan bulat dari 1 sampai dengan 1000 yang

- Tidak habis dibagi 3 atau 5?
- Tidak habis dibagi 3, 5, atau 7?

Penyelesaian :

Misalkan $S = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ dan a_1 = sifat habis dibagi 3, a_2 = sifat habis dibagi 5, a_3 = sifat habis dibagi 7

Yang ditanyakan (a) $N(a_1, a_2, a_3)$.

Jelas bahwa $N = 1000$. Selanjutnya kita peroleh,
 $N(a_1)$ = banyaknya anggota S yang habis dibagi 3
 $= [1000/3] = 333$

$N(a_2)$ = banyaknya anggota S yang habis dibagi 5
 $= [1000/5] = 200$

$N(a_3)$ = banyaknya anggota S yang habis dibagi 7
 $= [1000/7] = 142$

$N(a_2)$ = banyaknya anggota S yang habis dibagi 3 dan 5
 $= [1000/15] = 66$

$N(a_1a_3)$ = banyaknya anggota S yang habis dibagi 3 dan 7 sehingga, dengan prinsip inklusi-eksklusi, didapat :

$$\begin{aligned} \text{(a) } N(a_1' a_2') &= N - N(a_1) - N(a_2) + N(a_1a_2) \\ &= 1000 - 333 - 200 + 66 \\ &= 533 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } N(a_1' a_2' a_3') &= N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) + N(a_1a_2) + N(a_1a_3) + \\ &\quad N(a_2a_3) \\ &= 1000 - 333 - 200 - 142 + 66 + 47 + 28 - 9 \\ &= 457 \end{aligned}$$

b. Latihan 3.1

1. Misalkan S adalah himpunan semua permutasi dari $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$. Jika dipilih secara acak sebuah permutasi di S , berapakah probabilitasnya bahwa permutasi yang ditunjuk tidak memuat pola-pola berikut: "abc", "bcd", digh?
2. Gunakan Prinsip Inklusi-Eksklusi untuk menentukan banyaknya fungsi surjektif dari himpunan $A = \{1, 2, 3, \dots, a\}$ ke himpunan $B = \{1, 2, 3, \dots, b\}$
3. Tentukan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai dengan 1000000 yang tidak habis dibagi bilangan kuadrat sempurna atau bilangan cacah pangkat tiga.
4. Delapan kecelakaan terjadi dalam satu minggu. Dengan prinsip inklusi-eksklusi, hitunglah probabilitas bahwa terdapat paling sedikit satu kecelakaan tiap hari.

c. Rangkuman 3.1

1. Jika N adalah banyaknya objek dalam himpunan S dan $a_1 a_2 \dots a_r$ sifat-sifat yang mungkin oleh suatu objek di S , maka banyaknya objek di S yang tidak memiliki sifat $a_1 a_2 \dots a_r$ adalah

$$N(a_1' a_2' \dots a_r') = N - \sum_i N(a_i) + \sum_{i,j} N(a_i a_j) - \sum_{i,j,k} N(a_i a_j a_k) + \dots + (-1)^t \sum N(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_t}) + (-1)^r N(a_1 a_2 \dots a_r)$$

2. $N(a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{ik})$ adalah banyaknya objek S yang memiliki sifat-sifat $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{ik}$.
3. $N(a_{i1}', a_{i2}', \dots a_{ik}')$ adalah banyaknya objek S yang tidak memiliki sifat-sifat $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{ik}$.

d. Tes Formatif 3.1

1. Tentukan banyak bilangan bulat dari 1 sampai dengan 10000 yang tidak habis dibagi 4, 6, 7, atau 10.
2. Tentukan banyaknya permutasi dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sedemikian hingga pola-pola "124" dan "35" tidak muncul.
3. Terdapat 10 pilot dan 5 pesawat terbang di bandara udara A. Kesepuluh pilot tersebut ditugasi oleh atasannya untuk menerbangkan ke lima pesawat tersebut bersama-sama ke bandara udara B. Ada berapa cara yang mungkin untuk mengelompokkan pilot-pilot tersebut ke dalam pesawat?

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 3.1

1. $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10000\}$

Misal; $a_1 = \text{"habis dibagi 4"}$
 $a_2 = \text{"habis dibagi 6"}$
 $a_3 = \text{"habis dibagi 7"}$
 $a_4 = \text{"habis dibagi 10"}$

berarti : $N = |S| = 10000$

$$N = (a_1) = [10000/4] = 2500$$

$$N = (a_2) = [10000/6] = 1666$$

$$N = (a_3) = [10000/7] = 1428$$

$$N = (a_4) = [10000/10] = 1000$$

$$N = (a_1 a_2) = [10000/24] = 416$$

$$N = (a_1 a_3) = [10000/28] = 357$$

$$N = (a_1 a_4) = [10000/40] = 250$$

$$N = (a_2 a_3) = [10000/42] = 238$$

$$N = (a_2 a_4) = [10000/60] = 166$$

$$N = (a_3 a_4) = [10000/70] = 142$$

$$N = (a_1 a_2 a_3) = [10000/168] = 59$$

$$N = (a_1 a_2 a_4) = [10000/240] = 41$$

$$N = (a_2 a_3 a_4) = [10000/420] = 23$$

$$N = (a_1 a_3 a_4) = \lceil 10000 / 280 \rceil = 35$$

$$N = (a_1 a_2 a_3 a_4) = \lceil 10000 / 1680 \rceil = 5$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 N = (a_1' a_2' a_3' a_4') &= N - \sum N(a_i) + \sum N(a_i a_j) - \sum N(a_i a_j a_k) + \\
 &\quad \sum N(a_i a_j a_k a_l) \\
 &= 10000 - (2500 + 1666 + 1428 + 1000) + \\
 &\quad (416 + 357 + 250 + 238 + 166 + 142) - \\
 &\quad (59 + 41 + 23 + 35) + 5 \\
 &= 10000 - 6594 + 1569 - 158 + 5 = 4822
 \end{aligned}$$

Jadi banyak bilangan bulat dari 1 sampai dengan 10000 yang tidak habis dibagi 4, 6, 7, atau 10 adalah 4822 bilangan.

2. Misalkan $S = \{\text{Permutasi dari } \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

$a_1 = \text{"Sifat muncul pada "124""}"$

$a_2 = \text{"Sifat muncul pada "35""}"$

Berarti :

$$N = |S| = 6! = 720$$

$$N(a_1) = \text{banyaknya anggota } S \text{ yang memuat pola "124"} = 4! = 24$$

$$N(a_2) = \text{banyaknya anggota } S \text{ yang memuat pola "35"} = 5! = 120$$

$$N(a_1 a_2) = \text{banyaknya anggota } S \text{ yang memuat pola "124" dan "35"} = 3! = 6$$

Sehingga dengan prinsip inklusi-eksklusi diperoleh

$$N(a_1' a_2') = N - N(a_1) - N(a_2) + N(a_1 a_2)$$

$$= 720 - 24 - 120 + 6$$

$$= 582$$

3. Misalkan $S = \{\text{semua cara mengelompokkan 10-pilot ke dalam 5 pesawat terbang}\}$

$a_i =$ sifat ke i tidak mempunyai pilot $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Berarti;

$$N = |S| = 5^{10}$$

$N(a_i) =$ banyaknya cara mengelompokkan 10-pilot ke dalam 5-pesawat \exists pesawat i kosong

$$= (5-1)^{10} = 4^{10}$$

$$\text{Jadi } \sum N(a_i) = \binom{5}{1} (5-1)^{10}$$

$N(a_i a_j) =$ banyaknya cara mengelompokkan 10-pilot ke dalam 5-pesawat \exists pesawat i dan j kosong

$$= (5-2)^{10} = 3^{10}$$

$$\text{Jadi } \sum N(a_i a_j) = \binom{5}{2} (5-2)^{10}$$

$N(a_i a_j a_k) =$ banyaknya cara mengelompokkan 10-pilot ke dalam 5-pesawat \exists pesawat i, j , dan k kosong

$$= (5-3)^{10} = 2^{10}$$

$$\text{Jadi } \sum N(a_i a_j a_k) = \binom{5}{3} (5-3)^{10}$$

$N(a_i a_j a_k a_l) =$ banyaknya cara mengelompokkan 10-pilot ke dalam 5-pesawat \exists pesawat i, j, k dan l kosong

$$= (5-4)^{10} = 1^{10}$$

$$\text{Jadi } \sum N(a_i a_j a_k a_l) = \binom{5}{4} (5-4)^{10}$$

$N(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5) =$ banyaknya cara mengelompokkan 10-pilot ke dalam 5-pesawat \exists pesawat 1, 2, 3, 4 dan 5 kosong

$$= (5-5)^{10} = 0^{10}$$

$$\text{Jadi } \sum N(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5) = \binom{5}{0} (5-5)^{10} = 0$$

Jadi dengan prinsip inklusi-eksklusi diperoleh:

$$\begin{aligned} N(a_1' a_2' a_3' a_4' a_5') &= N - \sum N(a_i) + \sum N(a_i a_j) - \sum N(a_i a_j a_k) + \\ &\quad \sum N(a_i a_j a_k a_l) - N(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5) \\ &= 5^{10} - \binom{5}{1} 4^{10} + \binom{5}{2} 3^{10} - \binom{5}{3} 2^{10} + \binom{5}{4} 1^{10} - 0 \\ &= 9765625 - 5242880 + 590490 - 10240 + 5 - 0 \\ &= 5103000 \end{aligned}$$

Sehingga banyaknya cara yang mungkin untuk mengelompokkan pilot-pilot tersebut ke dalam pesawat adalah 5.103.000 cara

Kegiatan Belajar 2

a. Materi Perkuliahan 3.2

Banyak Obyek yang Memiliki Tepat M Sifat

Misalkan S adalah himpunan N obyek dan a_1, a_2, \dots, a_i adalah sifat-sifat dari obyek-obyek yang terdapat di dalam S . Adakalanya kita ingin mengetahui banyaknya obyek di S yang memiliki tepat M sifat. Kita akan lambangkan dengan e_m banyaknya obyek S yang memiliki tepat $m \leq r$ sifat

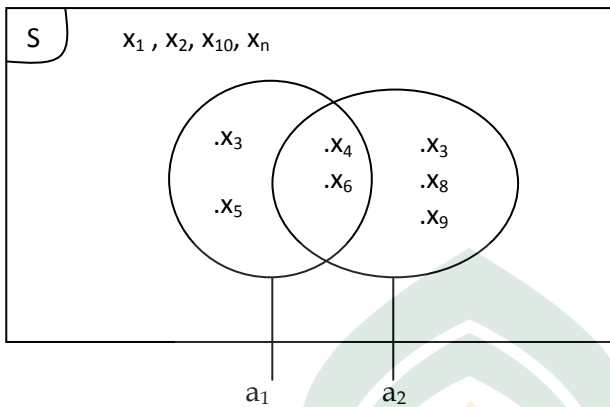
Selanjutnya untuk $t \geq 1$, kita definisikan S_t sebagai berikut

$$S_t = \sum N(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{it}) \dots\dots\dots(3.2.1)$$

Dimana "sigma" mencakup semua kemungkinan memilih t sifat $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{it}$ dari r sifat yang ada.

Contoh 3.2.1

Untuk $r = 2$



Dari diagram venn di atas diperoleh:

$$e_0 = |\{x_1, x_2, x_{10}, x_{11}\}| = 4$$

$$e_1 = |\{x_3, x_5, x_7, x_8, x_9\}| = 5$$

$$e_2 = |\{x_4, x_6\}| = 2$$

$$e_m = 0; \quad m \geq 3$$

Dengan menggunakan definisi 3.2.1 di atas, kita peroleh:

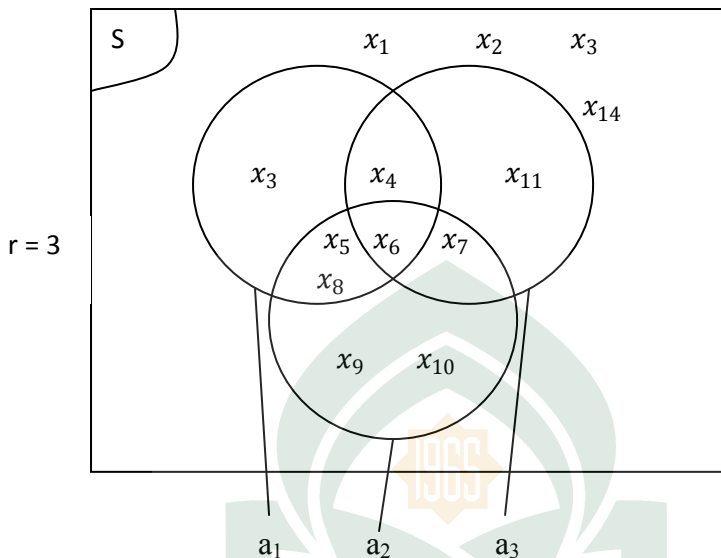
$$S_0 = 11;$$

$$S_1 = \sum N(a_i) = N(a_1) + N(a_2) = 4 + 5 = 9;$$

$$S_2 = \sum N(a_i a_j) = N(a_1 a_2) = 2$$

Contoh (3.2.2)

e_m = banyaknya objek di S yang memiliki m sifat



Dari diagram venn di atas diperoleh:

$$e_0 = |\{x_1, x_2, x_{12}, x_{14}\}| = 4$$

$$e_1 = |\{x_3, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{13}\}| = 5$$

$$e_2 = |\{x_4, x_7, x_5, x_8\}| = 4$$

$$e_3 = |\{x_6\}| = 1$$

Dengan menggunakan definisi 3.2.1 di atas, kita peroleh:

$$S_0 = N = 14;$$

$$S_1 = \sum N(a_i) = N(a_1) + N(a_2) + N(a_3) = 5 + 6 + 5 = 16;$$

$$S_2 = \sum N(a_i a_j) = N(a_1 a_2) + N(a_1 a_3) + N(a_2 a_3) = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$S_3 = \sum N(a_i a_j a_k) = N(a_1 a_2 a_3) = 1$$

Teorema 3.2.1

Misalkan a_1, a_2, \dots, a_r adalah sifat-sifat yang mungkin dimiliki oleh suatu objek himpunan S , maka banyak objek S yang memiliki tepat $m \leq r$ sifat adalah

$$e_m = \sum_{p=0}^{r-m} (-1)^p \binom{m+p}{p} S_{m+p}$$

$$e_m = \binom{m}{0} S_m - \binom{m+1}{1} S_{m+1} + \binom{m+2}{2} S_{m+2} \mp \dots +$$

$$(-1)^p \binom{m+p}{p} S_{m+p} + \dots + (-1)^{r-m} \binom{r}{r-m} S_r$$

Bukti:

$X \in S$, ada 3 kemungkinan

- Setiap obyek S yang memiliki lebih dari m sifat ($>m$ -sifat) misalkan $(m+p)$ -sifat
- Setiap obyek S yang memiliki tepat m sifat
- Setiap obyek S yang memiliki kurang dari m sifat ($<m$ -sifat)

Kasus 1 :

Jika obyek X memiliki lebih dari m sifat karena x memiliki $(m+p)$ -sifat maka dapat dihitung: ruas kiri x tidak dihitung dalam menghitung e_m . dan akan ditunjukkan bahwa obyek ini dihitung sebanyak nol kali dalam menghitung ruas kanan. Perhatikan bahwa obyek tersebut dihitung sebanyak $\binom{m+p}{m+1}$ dalam menghitung S_{m+1} , $\binom{m+p}{m+2}$ dalam menghitung S_{m+2} , $\binom{m+p}{m+3}$ dalam menghitung S_{m+3} , dst. Secara umum, obyek tersebut dihitung sebanyak $\binom{m+p}{m+j}$ dalam menghitung S_{m+j} , untuk $j \leq p$ sedangkan untuk $p < j$, obyek tersebut tidak dihitung dalam menghitung S_{m+j} , karena sudah kita misalkan obyek tersebut memiliki $m+p$ sifat.

Dengan demikian untuk ruas kanan dapat kita tulis sebagai berikut:

$$= \binom{m}{0} S_m - \binom{m+1}{1} S_{m+1} + \binom{m+2}{2} S_{m+2} \mp \dots +$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^p \binom{m+p}{p} S_{m+p} + \dots + (-1)^r \binom{r}{r-m} S_r \\
&= \binom{m}{0} \binom{m+p}{m} - \binom{m+1}{1} \binom{m+p}{m+1} + \binom{m+2}{2} \binom{m+p}{m+2} \\
&\quad \mp \dots + (-1)^p \binom{m+p}{p} \binom{m+p}{m+p} + \dots + 0 \\
&= \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{m+j}{j} \binom{m+p}{m+j} \\
&= \sum_{j=0}^p (-1)^j \frac{(m+j)!}{m! j!} \cdot \frac{(m+p)!}{(m+j)! (p-j)!} \cdot \frac{p!}{p!} \\
&= \sum_{j=0}^p (-1)^j \frac{(m+p)! p!}{m! j! (p-j)! p!} \\
&= \sum_{j=0}^p (-1)^j \frac{p!}{(p-j)! p!} \cdot \frac{(m+p)!}{(m! j!)} \\
&= \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} \binom{m+p}{m} \\
&= \binom{m+p}{m} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} \\
&= \binom{m+p}{m} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Jadi ruas kanan juga bernilai nol. Sehingga diperoleh ruas kanan sama dengan ruas kiri yaitu masing-masing bernilai 0.

Kasus 2 :

Jika obyek X memiliki tepat m sifat, maka obyek ini dihitung tepat satu dalam menghitung e_m . selanjutnya, karena obyek x dihitung sekali dalam menghitung S_m ; dihitung nol kali dalam menghitung S_{m+k} . untuk $k \geq 1$, maka obyek ini dihitung tepat satu kali dalam menghitung ruas kanan.

$$e_m = S_m - \binom{m+1}{1} S_{m+1} + \binom{m+2}{2} S_{m+2} + \cdots + (-1)^p \binom{m+p}{p} S_{m+p} \\ + \cdots + (-1)^{r-m} \binom{r}{r-m} S_r$$

$$1 = 1 - 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots + 0$$

Sehingga diperoleh ruas kiri sama dengan ruas kanan yang masing-masing bernilai 1.

Kasus 3 :

Jika obyek ini memiliki kurang dari m sifat, maka jelas obyek tersebut “tidak dihitung” dalam menghitung e_m dan “tidak dihitung” dalam menghitung setiap suku ruas kanan.

$$e_m = S_m - \binom{m+1}{1} S_{m+1} + \binom{m+2}{2} S_{m+2} + \cdots + (-1)^p \binom{m+p}{p} S_{m+p} \\ + \cdots + (-1)^{r-m} \binom{r}{r-m} S_r$$

$$0 = 0$$

Sehingga diperoleh ruas kiri sama dengan ruas kanan yang masing-masing bernilai 0.

Perhatikan **contoh 3.2.2** kita menggunakan **teorema 3.2.1** sehingga diperoleh:

$$e_1 = \sum_{p=0}^2 (-1)^p \binom{1+p}{p} S_{1+p} \\ = 1 \cdot \binom{1}{0} S_1 - 1 \cdot \binom{2}{1} S_2 + 1 \cdot \binom{3}{2} S_3 \\ = 1 \cdot 1 \cdot 16 - 1 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 1 \\ e_1 = 16 - 14 + 3 = 5 \\ e_2 = \sum_{p=0}^1 (-1)^p \binom{2+p}{p} S_{2+p} \\ = 1 \cdot \binom{2}{0} S_1 - 1 \cdot \binom{3}{1} S_3 \\ = 1 \cdot 1 \cdot 7 - 1 \cdot 3 \cdot 1 \\ = 7 - 3 = 4$$

Perhatikan formula :

$$e_m = \sum_{p=0}^{r-m} (-1)^p \binom{m+p}{p} S_{m+p}$$

Jika $m = 0$, diperoleh:

$$\begin{aligned} e_0 &= \sum_{p=0}^r (-1)^p \binom{p}{p} S_p \\ &= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^t S_t + \dots + (-1)^r S_r \\ &= N - N(a_{i1}) + N(a_{i1}a_{i2}) - N(a_{i1}a_{i2}a_{i3}) + \dots \\ &\quad + (-1)^t \sum N(a_{i1}a_{i2}a_{i3} \dots a_{it}) + \dots \\ &\quad + (-1)^r N(a_{i1}a_{i2} \dots a_{ir}) \\ e_0 &= N(a_1' a_2' a_3' \dots a_r') \end{aligned}$$

Contoh 3.2.3

Sebanyak n pasang suami istri hadir dalam suatu pesta dansa. Dansa dilakukan serentak dan seorang pria harus berdansa dengan seorang wanita.

- Berapakah peluang terdapat tepat satu pasang suami istri berdansa bersama dalam pesta dansa tersebut?
- Berapakah peluang terdapat tepat tiga pasang suami istri berdansa bersama dalam pesta dansa tersebut?

Penyelesaian :

Di dalam contoh 3.2.3 menyatakan ada n pasangan suami istri, sehingga $N(S) = n!$

$N(a_1)$ banyaknya kemungkinan pasangan dansa jika suami-1 berpasangan dengan istrinya yaitu $(n-1)!$.

Begitu pula dengan $N(a_2), N(a_3), \dots, N(a_n)$ sehingga ;

$$N(a_i) = (n-1)!; \quad \forall i, 1 \leq i \leq n$$

Berarti;

$$S_1 = \sum N(a_i) = \binom{n}{1} (n-1)!$$

$$S_2 = \sum N(a_i a_j) = \binom{n}{2} (n-2)!$$

\vdots

$$S_k = \sum N(a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \cdots a_{i_k}) = \binom{n}{k} (n-k)!$$

\vdots

$$S_n = \sum N(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n) = \binom{n}{n} (n-n)!$$

Jadi :

- a. Peluang terdapat tepat satu pasang suami istri berdansa bersama dalam pesta dansa tersebut adalah

$$\begin{aligned} e_1 &= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{1+p}{p} S_{1+p}, \text{ misalkan } 1+p = n \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{1+p}{p} \binom{n}{p+1} (n-1-p)! \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{(1+p)!}{p!!} \cdot \frac{n!}{(1+p)!(n-1-p)!} \cdot (n-1-p)! \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{n!}{p!} \\ &= n! \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{1}{p!} \\ &= n! \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p!} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh peluangnya adalah

$$\text{Probabilitas} = \frac{e_1}{N} = \frac{n! \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p!}}{n!} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{p!}$$

- b. Peluang terdapat tepat tiga pasang suami istri berdansa bersama dalam pesta dansa tersebut

$$\begin{aligned} e_3 &= \sum_{p=0}^{n-3} (-1)^p \binom{3+p}{p} S_{3+p} \\ &= \sum_{p=0}^{n-3} (-1)^p \binom{3+p}{p} \binom{n}{p+3} (n-3-p)! \\ &= \sum_{p=0}^{n-3} (-1)^p \frac{(3+p)!}{p!3!} \cdot \frac{n!}{(3+p)!(n-3-p)!} \cdot (n-3-p)! \\ &= \sum_{p=0}^{n-3} \frac{n! (-1)^p}{3! p!} \\ &= \frac{n!}{3!} \sum_{p=0}^{n-3} \frac{(-1)^p}{p!} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh peluangnya adalah

$$\text{Probabilitas} = \frac{e_3}{N} = \frac{\frac{n!}{3!} \sum_{p=0}^{n-3} \frac{(-1)^p}{p!}}{n!} = \frac{1}{3!} \sum_{p=0}^{n-3} \frac{(-1)^p}{p!}$$

Banyaknya Objek yang Memiliki yang Memiliki Sifat Genap atau Ganjil

Disini dibahas tentang objek-objek dari S yang mempunyai sifat sebanyak bilangan genap ataupun ganjil. Berapa banyakkah objek-objek dari S yang memiliki sifat sebanyak genap? atau Berapa

banyakkah objek-objek dari S yang memiliki sifat sebanyak ganjil?
Jawaban dari pertanyaan tersebut diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 3.2.2

Jika didalam himpunan S terdapat r sifat, maka banyaknya objek S yang memiliki sifat sebanyak bilangan genap adalah :

$$e_0 + e_2 + e_4 + \dots = \frac{1}{2} \left[s_0 + \sum_{t=0}^r (-2)^t s_t \right]$$

dan banyaknya objek S yang memiliki sifat sebanyak bilangan ganjil adalah :

$$e_1 + e_3 + e_5 + \dots = \frac{1}{2} \left[s_0 - \sum_{t=0}^r (-2)^t s_t \right]$$

Bukti :

Kita misalkan :

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} e_m x^m \\ &= e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \dots + e_r x^r + e_{r+1} x^{r+1} + \dots \end{aligned}$$

$= e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \dots + e_r x^r + 0$ (banyaknya sifat di S ada r sifat)

Dari teorema 3.2.1, kita peroleh:

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{p=0}^r (-1)^p \binom{p}{p} S_p + \left[\sum_{p=0}^{r-1} (-1)^p \binom{1+p}{p} S_{1+p} \right] x + \dots + \\ &+ \dots + \left[\sum_{p=0}^{r-r} (-1)^p \binom{r+p}{p} S_{r+p} \right] x^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[S_0 - S_1 + S_2 - S_3 \pm \dots + (-1)^r S_r \right] + \\
&\quad \left[\binom{1}{0} S_1 - \binom{2}{1} S_2 + \binom{3}{2} S_3 \pm \dots + \binom{r}{r-1} (-1)^r S_r \right] x + \dots + \\
&\quad \left[\binom{r}{0} S_r \right] x^r \\
&= \left[S_0 + \left[S_1 + \binom{1}{0} S_1 x \right] + \left[S_2 - \binom{2}{1} S_2 x + \binom{2}{0} S_2 x^2 \right] \right. \\
&\quad + \left[-S_3 + \binom{3}{2} S_3 x - \binom{3}{1} S_3 x^2 + \binom{3}{0} S_3 x^3 \right] + \dots \\
&\quad + \left. \left[(-1)^r S_r + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} S_r x + (-1)^{r-2} \binom{r}{r-2} S_r x^2 + \binom{r}{0} S_r x^r \right] \right] \\
&= \left[S_0 + S_1 \left[-1 + \binom{1}{0} x \right] + S_2 \left[1 - \binom{2}{1} x + \binom{2}{0} x^2 \right] \right. \\
&\quad + S_3 \left[-1 + \binom{3}{2} x - \binom{3}{1} x^2 + \binom{3}{0} x^3 \right] + \dots \\
&\quad + \left. S_r \left[(-1)^r + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} x + (-1)^{r-2} \binom{r}{r-2} x^2 + \binom{r}{0} x^r \right] \right] \\
&= S_0 + S_1 (x-1) + S_2 (x-1)^2 + S_3 (x-1)^3 \pm \dots + S_r (x-1)^r \\
E(x) &= S_0 + \sum_{t=1}^r S_t (x-1)^t
\end{aligned}$$

untuk $x=1$,

$$E(1) = S_0$$

untuk $x=-1$,

$$E(-1) = S_0 + \sum_{t=1}^r S_t (-2)^t$$

Karena $E(x) = \sum_{m=0}^{\infty} e_m (x)^m$ maka diperoleh;

$$E(1) = \sum_{m=0}^{\infty} e_m = e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + \dots \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$E(-1) = \sum_{m=0}^n e_m (-1)^m = e_0 - e_1 + e_2 - e_3 + \dots \quad \dots\dots\dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) dijumlahkan kemudian dibagi 2

$$\begin{aligned} \frac{E(1)+E(-1)}{2} &= e_0 + e_2 + e_4 + \dots \\ &= \frac{S_0 + S_0 + \sum_{t=1}^r S_t (-2)^t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(S_0 + \sum_{t=1}^r S_t (-2)^t \right) \end{aligned}$$

Dari persamaan (1) dan (2) dikurangkan, kemudian dibagi 2

$$\begin{aligned} \frac{E(1)-E(-1)}{2} &= e_1 + e_3 + e_5 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(S_0 - \left(S_0 + \sum_{t=1}^r S_t (-2)^t \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(S_0 - \left(S_0 + \sum_{t=1}^r S_t (-2)^t - S_0 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(S_0 - \sum_{t=1}^r S_t (-2)^t \right) \end{aligned}$$

b. Latihan 3.2

1. Hitunglah banyaknya permutasi dari $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ sedemikian hingga terdapat tepat k bilangan menempati tempatnya semula.
2. (a) Misalkan Q_n menyatakan banyaknya permutasi dari $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ sedemikian hingga pola-pola: $12, 23, 34, \dots, (n-1)n$ tidak muncul. Tentukan Q_n ?

(b). Jika $D_n = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}$. Buktikan bahwa $Q_n = D_n + D_{n-1}$

c. Rangkuman 3.2

1. Misalkan a_1, a_2, \dots, a_r adalah sifat-sifat yang mungkin dimiliki oleh suatu objek himpunan S , maka banyak objek S yang memiliki tepat $m \leq r$ sifat adalah

$$e_m = \sum_{p=0}^{r-m} (-1)^p \binom{m+p}{p} S_{m+2}$$

2. Jika di dalam himpunan S terdapat r sifat, maka banyaknya objek S yang memiliki sifat sebanyak bilangan genap adalah

$$e_0 + e_2 + e_4 + \dots = \frac{1}{2} \left[s_0 + \sum_{i=0}^r (-2)^i s_i \right]$$

3. Jika di dalam himpunan S terdapat r sifat, maka banyaknya objek S yang memiliki sifat sebanyak bilangan ganjil adalah

$$e_1 + e_3 + e_5 + \dots = \frac{1}{2} \left[s_0 - \sum_{i=0}^r (-2)^i s_i \right]$$

d. Tes Formatif 3.2

1. Sebanyak n mahasiswa menempati n buah kursi berbeda dalam ruangan. Semua mahasiswa disuruh berdiri, kemudian semua mahasiswa diminta kembali menempati n kursi secara acak. Berapakah peluang terdapat tepat sebanyak p mahasiswa menempati kursinya semula?
2. Tentukan banyaknya permutasi dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sedemikian sehingga:
 - a. terdapat tepat tiga bilangan menempati tempatnya semula,
 - b. terdapat tepat enam bilangan menempati tempatnya semula.

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 3.2

1. Misalkan,
 S : {semua kemungkinan n -mahasiswa menempati n -kursi}
 a_1 : {mahasiswa ke- i menempati kursinya semula, $1 \leq i \leq n$ }
Berarti;
 $N = |S| = S_0 = n!$
 $N(a_i)$ = banyaknya cara dimana mahasiswa- i menempati kursinya

semula yaitu $(n-1)!$

$$\text{Jadi } S_1 = \sum N(a_i) = \binom{n}{1}(n-1)!$$

$N(a_i a_j)$ = banyaknya cara dimana mahasiswa- i dan j menempati kursinya semula yaitu $(n-2)!$

$$\text{Jadi } S_2 = \sum N(a_i a_j) = \binom{n}{2}(n-2)!$$

\vdots

$N(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_t})$ = banyaknya cara dimana mahasiswa- $1i, 2i, \dots, ti$ menempati kursinya semula yaitu $(n-t)!$

$$\text{Jadi } S_t = \sum N(a_{1i} a_{2i} \dots a_{ii}) = \binom{n}{t} (n-t)!$$

⋮

$N(a_1 a_2 \dots a_n) =$ banyaknya cara dimana mahasiswa-1, 2, . . . , n menempati kursinya semula yaitu $(n - n)!$

$$\text{Jadi } S_n = \sum N(a_1 a_2 \dots a_n) = \binom{n}{n} (n - n)!$$

Berdasarkan formula:

$$e_m = \sum_{p=0}^{r-m} (-1)^p \binom{m+p}{p} S_{m+p}$$

Maka banyaknya kemungkinan p -mahasiswa menempati kursinya semula adalah

$$\begin{aligned} e_p &= \sum_{t=0}^{r-p} (-1)^t \binom{p+t}{t} S_{p+t} \\ &= \sum_{t=0}^{r-p} (-1)^t \binom{p+t}{t} \binom{n}{p+t} (n-p-t)! \\ &= \sum_{t=0}^{r-p} (-1)^t \frac{n!}{t!(p+t-t)!} \cdot \frac{n!}{(p+t)!(n-p-t)!} \cdot (n-p-t)! \\ &= \sum_{t=0}^{r-p} (-1)^t \frac{n!}{t! p!} \\ &= \frac{n!}{p!} \sum_{t=0}^{r-p} (-1)^t \frac{1}{t!} \end{aligned}$$

Sehingga peluangnya adalah :

$$\begin{aligned} &= \frac{e_p}{N} \\ &= \frac{\frac{n!}{p!} \sum_{t=0}^{r-p} (-1)^t \frac{1}{t!}}{n!} \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{t=0}^{r-p} (-1)^t \frac{1}{t!} \end{aligned}$$

2. Banyaknya permutasi dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sedemikian sehingga

a. Terdapat tepat 3 bilangan menempati tempatnya semula

Berdasarkan teorema 3.2.1 yaitu

$$e_m = \sum_{p=0}^{10-m} (-1)^p \binom{m+p}{p} S_{m+p}$$

$$\text{Dimana } S_{m+p} = \sum N(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{m+p}})$$

Misalkan $S = \{\text{semua permutasi dari } \{1, 2, \dots, 10\}\}$

a_i = sifat permutasi di S sedemikian hingga bilangan- i menempati tempatnya semula, $i = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

berarti;

$N(a_i)$ = banyaknya permutasi di S sedemikian hingga bilangan- i menempati tempatnya semula $(10-1)!$

$$\text{Jadi } \sum N(a_i) = \binom{10}{1} (10-1)!$$

$N(a_i a_j)$ = banyaknya permutasi di S sedemikian hingga bilangan- i dan j menempati tempatnya semula $(10-2)!$

$$\text{Jadi } \sum N(a_i a_j) = \binom{10}{2} (10-2)!$$

\vdots
 $N(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{m+p}})$ = banyaknya permutasi di S sedemikian hingga bilangan- i_1, i_2, \dots, i_{m+p} menempati tempatnya semula $(10 - (m+p))!$

$$\text{Jadi } \sum N(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{m+p}}) = \binom{10}{m+p} (10-m-p)!$$

Sehingga ;

$$e_m = \sum_{p=0}^{10-m} (-1)^p \binom{m+p}{p} S_{m+p}$$

$$\begin{aligned}
 e_m &= \sum_{p=0}^{10-m} (-1)^p \binom{m+p}{p} \binom{10}{m+p} (10-m-p)! \\
 &= \sum_{p=0}^{10-m} (-1)^p \frac{(m+p)!}{p! m!} \frac{10!}{(m+p)!(10-m-p)!} (10-m-p)! \\
 &= \frac{10!}{m!} \sum_{p=0}^{10-m} \frac{(-1)^p}{p!}
 \end{aligned}$$

Jadi untuk $m = 3$, diperoleh;

$$\begin{aligned}
 e_3 &= \frac{10!}{3!} \sum_{p=0}^{10-3} \frac{(-1)^p}{p!} \\
 e_3 &= \frac{10!}{3!} \sum_{p=0}^7 \frac{(-1)^p}{p!} \\
 e_3 &= \frac{10!}{3!} \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} \right) \\
 e_3 &= 222480
 \end{aligned}$$

b. Analog dengan (a) di atas
untuk $m = 3$, diperoleh;

$$\begin{aligned}
 e_6 &= \frac{10!}{6!} \sum_{p=0}^{10-6} \frac{(-1)^p}{p!} \\
 e_6 &= \frac{10!}{6!} \sum_{p=0}^4 \frac{(-1)^p}{p!} \\
 e_6 &= \frac{10!}{6!} \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) \\
 e_6 &= 1890
 \end{aligned}$$

BAB IV

KONSEP DASAR PADA GRAPH

A. GAMBARAN SINGKAT MENGENAI MATERI KULIAH

Materi kuliah ini membahas tentang pengertian graph dan jenis-jenis graph serta contoh graph, graph bagian, jalan, jejak, lintasan, sirkuit, sikel, graph terhubung dan komponen graph, komplemen graph, isomorfisme pada graph.

B. PEDOMAN MEMPELAJARI MATERI

Baca dengan baik uraian mengenai pengertian graph dan jenis-jenis graph serta contoh graph. Kemudian mengerti tentang definisi graph, jenis-jenis graph dan membuat contoh-contoh yang lain tentang graph berdasarkan jenis-jenisnya, graph bagian, jalan, jejak, lintasan, sirkuit, sikel, graph terhubung dan komponen graph, komplemen graph, isomorfisme pada graph.

C. TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian graph
2. Mahasiswa dapat menjelaskan jenis-jenis graph
3. Mahasiswa dapat memberikan contoh berdasarkan jenis-jenis graph.
4. Mahasiswa dapat menjelaskan graph bagian.
5. Mahasiswa dapat memberikan contoh graph bagian
6. Mahasiswa dapat menjelaskan jalan, jejak, lintasan, sirkuit dan sikel.
7. Mahasiswa dapat memberikan contoh jalan, jejak, lintasan, sirkuit dan sikel.

8. Mahasiswa dapat menjelaskan graph terhubung dan komponen graph
9. Mahasiswa dapat memberikan contoh tentang graph terhubung dan komponen graph
10. Mahasiswa dapat menjelaskan komplemen graph.
11. Mahasiswa dapat memberikan contoh tentang komplemen graph
12. Mahasiswa dapat menjelaskan isomorfisme pada graph.
13. Mahasiswa dapat memberikan contoh isomorfisme pada graph.



D. KEGIATAN BELAJAR

Kegiatan Belajar 1

a. Materi Perkuliahan 4.1

Pendahuluan

Secara kasar, graph adalah suatu diagram yang memuat informasi tertentu jika diinterpretasikan secara tepat. Dalam kehidupan sehari-hari, graph digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur seperti bagan alir pendaftaran mahasiswa baru, rangkaian listrik dan jarak antara kota pada peta. Contoh bagan alir dapat pula kita lihat pada ayat-ayat Al Quran yang menerangkan pelaksanaan ibadah haji. Adanya bagan alir (tata cara dan tempat) melaksanakan ibadah haji dipertegas oleh doa nabi Ibrahim dan Ismail yang diabadikan dalam QS. Al Baqarah: 128.

رَبَّنَا وَاجْعَلْنَا مُسْلِمَيْنِ لَكَ وَمِنْ ذُرِّيَّتِنَا أُمَّةً مُّسْلِمَةً لَّكَ وَأَرِنَا مَنَاسِكَنَا
وَتُبَّ عَلَيْنَا إِنَّكَ أَنْتَ التَّوَّابُ الرَّحِيمُ

Terjemahnya:

Ya Tuhan kami, jadikanlah kami berdua orang yang tunduk patuh kepada Engkau dan (jadikanlah) di antara anak cucu kami umat yang tunduk patuh kepada Engkau dan tunjukkanlah kepada kami cara-cara dan tempat-tempat ibadah haji kami, dan terimalah taubat kami. Sesungguhnya Engkaulah Yang Maha Penerima tobat lagi Maha Penyayang. (QS. 2:128)

Pada penggalan QS. 2:128, nabi Ibrahim dan Ismail memohon petunjuk kepada Allah SWT tentang cara-cara dan tempat-tempat ibadah haji. Saat ini petunjuk tersebut dikenal dengan bagan alir. Sedangkan jarak antara kota-kota dapat pula dilihat pada QS. Saba' ayat 18.

وَجَعَلْنَا بَيْنَهُمْ وَبَيْنَ الْقُرَى الَّتِي بَرَكْنَا فِيهَا ظَهْرًا وَقَدَرْنَا فِيهَا
السَّيْرَ سِيرُوا فِيهَا لَيَالِيَ وَأَيَّامًا ءَامِنِينَ ﴿١٨﴾

Terjemahnya:

Dan Kami jadikan antara mereka dan antara negeri-negeri yang Kami limpahkan berkat kepadanya, beberapa negeri yang berdekatan dan Kami tetapkan antara negeri-negeri itu (jarak-jarak) perjalanan. Berjalanlah kamu di kota-kota itu pada malam dan siang hari dengan aman. (QS. 34:18).

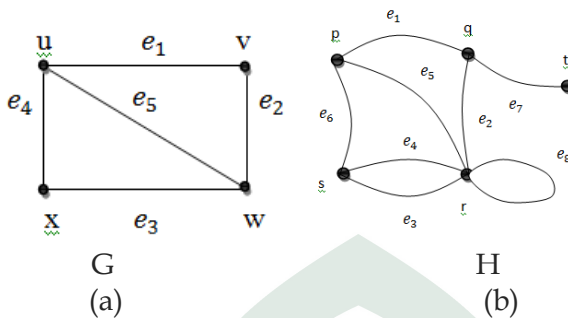
Pada penggalan QS. 34:18 dijelaskan bahwa jarak antara negeri berbeda-beda ada yang berdekatan dan ada pula yang ditetapkan jajak-jarak perjalanan (berjauhan). Sehingga dapat dipahami bahwa jarak diantara negeri tersebut berbeda-beda. Pada matematika diskrit jarak antara beberapa kota dapat digambarkan sebagai sebuah graph.

Pengertian Graph

Sebuah graph G berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut **himpunan titik G** , dan himpunan $E(G)$ disebut **himpunan sisi G** . Misalkan u dan v adalah dua titik di G dan $e = \{u, v\}$ (sehingga ditulis $e = uv$) adalah sebuah sisi G . Kita katakana : titik u dan titik v **berhubungan langsung (adjacent)** di G ; sisi e **menghubungkan (joining)** titik u dan titik v di G ; u dan v **titik-titik akhir** sisi e ; sisi e **terkait (incident)** dengan titik v dan juga titik u .

Sebuah graph G dapat dipresentasikan dalam bentuk diagram (gambar) dimana setiap titik G digambarkan dengan sebuah noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G digambarkan dengan sebuah kurva **sederhana (ruas garis)** dengan titik-titik akhir di kedua titik tersebut. Misalnya, graph G dengan $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dimana $e_1 = uv$, $e_2 = vw$, $e_3 = wx$, $e_4 = ux$, $e_5 = uw$, dapat dipresentasikan dalam bentuk diagram seperti tampak pada Gambar 4.1.1(a). Sedangkan graph H dengan $V(H) = \{p, q, r, s, t\}$ dan $E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ dimana $e_1 = pq$, $e_2 = qr$,

$e_3 = rs$, $e_4 = pr$, $e_5 = ps$, $e_6 = ps$, $e_7 = qt$, $e_8 = rr$ dan dapat dipresentasikan seperti terlihat pada Gambar 4.1.1(b).

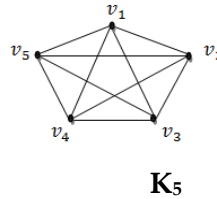
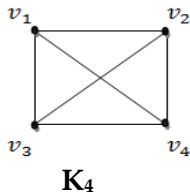


Gambar 4.1.1 : (a) Graph G dengan 4 titik dan 5 sisi
(b) Graph H dengan 5 titik dan 8 sisi;
Sisi e_8 Disebut gelung;
Sisi-sisi e_3, e_4 Disebut sisi-rangkap.

Sebuah sisi graph yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri disebut **gelung (loop)**. Misalnya, sisi e_8 Di graph H pada Gambar 4.1(b) adalah sebuah gelung. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik u dan v pada suatu graph, maka sisi-sisi tersebut disebut **sisi-rangkap/sisi-ganda (multiple-edges)**. Misalnya, sisi-sisi e_3 dan e_4 di graph H pada Gambar 4.1(b) adalah sebuah sisi-rangkap. Graph yang tidak mempunyai sisi rangkap dan tidak memiliki gelung disebut **graph sederhana**. Sedangkan sebuah graph yang memiliki sisi-rangkap tetapi tidak memiliki gelung disebut **graph rangkap (multi graph)**. Sebagai contoh, graph G pada Gambar 4.1(a) adalah graph sederhana, sedangkan graph H pada Gambar 4.1(b) bukan graph sederhana.

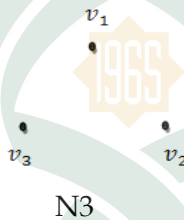
Jenis Graph

1. Sebuah **graph komplit (graph lengkap)** dengan n titik, dilambangkan dengan K_n , adalah graph sederhana dengan n titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi. Misalkan graph komplit dengan 4 titik yang disimbolkan dengan K_4 dan graph komplit dengan 5 titik yang disimbolkan dengan K_5 .



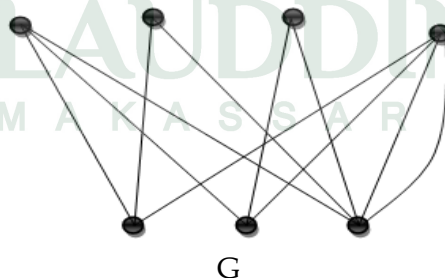
**Gambar 4.1.2; K_4 graph komplit dengan 4 titik
 K_5 graph komplit dengan 5 titik**

2. Graph yang tidak memiliki sisi disebut **graph kosong** atau **graph nol**. Graph nol dengan titik n dan setiap dua titik berbeda dilambangkan dengan N_n . Misalkan graph kosong dengan 3 titik yang disimbolkan dengan N_3



Gambar 4.1.3; N_3 graph kosong dengan 3 titik

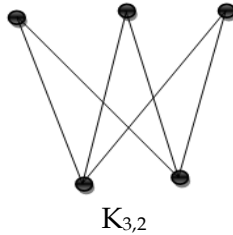
3. Sebuah graph G disebut **grap bipartisi** jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B . Kita sebut (A,B) bipartisis dari G .



Gambar 4.1.4 : Graph G bipartisi

4. Apabila G sederhana dan bipartisi dengan bipartisi (A,B) sedemikian hingga setiap titik di A berhubungan langsung

dengan setiap titik di G , maka G disebut graph bipartisi komplit, dilambangkan dengan $K_{m,n}$ dimana $|A| = m$ dan $|B| = n$. Sebagai contoh, perhatikan graph pada Gambar 4.3.



Gambar 4.1.5 : Graph $K_{3,2}$ bipartisi komplit.

Perhatikan bahwa, sebagai akibat dari definisi, graph bipartisis mungkin saja mempunyai sisi rangkap, tetapi tidak mungkin memuat gelung. Begitu juga banyaknya titik graph bipartisi komplit $K_{m,n}$ adalah $m+n$ dan banyaknya sisi adalah mn .

b. Latihan 4.1

1. Jelaskan pengertian graph?
2. Gambarlah graph bipartisi komplit dengan $K_{5,3}$?
3. Gambarlah graph $G = (V(G), E(G))$ bila diketahui $V(G)$ dan $E(G)$ sebagai berikut:
 - a. $V(G) = \{a, b, c, d\}$, $E(G) = \{ab, be, ad, bd\}$
 - b. $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_2, v_2v_3, v_4v_5, v_2v_3\}$
 - c. $V(G) = \{u, v, w\}$ dan $E(G) = \{uu, vv, ww\}$

c. Rangkuman 4.1

1. Graph G yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik $V(G)$.
2. Sebuah sisi graph yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri disebut **gelung (loop)**.

3. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik u dan v pada suatu graph, maka sisi-sisi tersebut disebut **sisi-rangkap/sisi-ganda (multiple-edges)**.
4. Graph yang tidak mempunyai sisi rangkap dan tidak memiliki gelung disebut **graph sederhana**.
5. Sebuah graph yang memiliki sisi-rangkap tetapi tidak memiliki gelung **disebut graph rangkap (multi graph)**.
6. Sebuah **graph komplit (graph lengkap)** dengan n titik, dilambangkan dengan K_n , adalah graph sederhana dengan n titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi.
7. Graph yang tidak memiliki sisi disebut **graph kosong** atau **graph nol**. Graph nol dengan titik n dan setiap dua titik berbeda dilambangkan dengan N_n .
8. Sebuah graph G disebut **grap bipartisi** jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B .
9. Apabila G sederhana dan bipartisi dengan bipartisi (A,B) sedemikian hingga setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di G , maka G disebut graph bipartisi komplit.

d. Tes Formatif 4.1

1. Jelaskan perbedaan antara graph bipartisi dan graph bipartisi komplit!
2. Jelaskan yang dimaksud dengan graph kosong atau graph nol!
3. Apakah graph sederhana mempunyai loop (gelung) atau sisi rangkap? Jelaskan!

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 4.1

1. Sebuah graph G disebut **grap bipartisi** jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B . Kita sebut (A,B) bipartisis dari G . Sedangkan Apabila G sederhana dan bipartisi dengan bipartisi (A,B) sedemikian hingga setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di G , maka G disebut graph bipartisi komplit

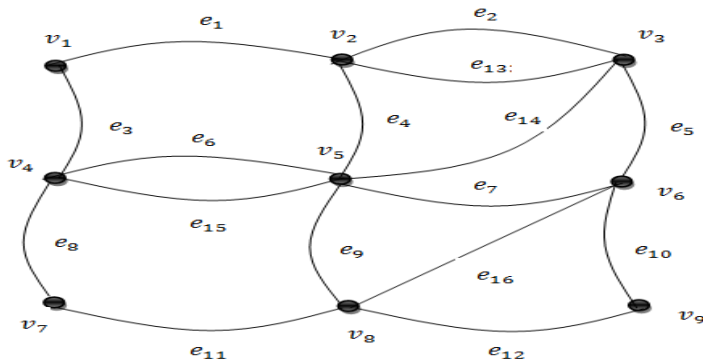
2. Graph kosong atau grap nol adalah graph yang tidak memiliki sisi.
3. Graph sederhana tidak memiliki loop atau sisi rangkap karena graph sederhana merupakan graph yang tidak memiliki loop atau sisi rangkap.

Kegiatan Belajar 2

a. Materi Perkuliahan 4.2

Istilah-Istilah dalam Graph

Misalkan G adalah sebuah graph. Sebuah **jalan (walk)** di G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i , untuk $1 \leq i \leq k$. Kita katakan W adalah sebuah jalan dari titik v_0 ke titik v_k , atau **jalan- (v_0, v_k)** . Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut **titik awal** dan **titik akhir** W . Sedangkan titik-titik v_1, v_2, \dots, v_{k-1} disebut **titik-titik internal** W ; dan k disebut panjang jalan W . Perhatikan bahwa panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W . Sebuah titik G , mungkin saja muncul lebih dari satu kali dalam jalan W , begitu juga dengan sebuah sisi G , boleh muncul lebih dari satu kali dalam jalan W . Jika semua sisi $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ dan jalan W berbeda, maka W disebut sebuah **jejak (trail)**. Jika semua titik $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ dalam jalan W juga berbeda, maka W disebut **lintasan (path)**. Sebuah jalan W dengan panjang positif disebut **tertutup**, jika titik awal dan titik akhir dari W identik (sama). Jejak tertutup disebut **sirkuit**. Sebuah sirkuit di graph G yang memuat semua sisi disebut **sirkuit Euler**. Sebuah graph yang memuat sirkuit Euler disebut **graph Euler**. Sebuah **sikel (cycle)** adalah sebuah jejak tertutup (closed trail) yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Banyaknya sisi dalam suatu sikel disebut panjang dari sikel tersebut. Sikel dengan panjang k disebut **sikel- k** , disimbolkan dengan C_k . Sebuah sikel yang memuat semua titik sebuah graph disebut **sikel Hamilton**. Graph yang memuat sikel Hamilton disebut **graph Hamilton**.



Gambar 4.2.1 : Graph G

Perhatikan graph G pada Gambar 4.2.1 :

- 1) Barisan $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_5, v_6, e_5, v_3)$ adalah sebuah jalan – $(v_1 - v_3)$ di graph G yang panjangnya 4. Karena dalam barisan ini sisi e_5 Muncul lebih dari sekali, jelas barisan ini bukan jejak.
- 2) Barisan $(v_1, e_3, v_4, e_6, v_5, e_9, v_8, e_{11}, v_7, e_8, v_4)$ adalah sebuah jejak buka di G dengan panjang 5. Karena titik v_4 Muncul lebih dari satu kali, maka jejak tersebut bukan lintasan.
- 3) Barisan $(v_1, e_3, v_4, e_8, v_7, e_{11}, v_8, e_9, v_5)$ adalah sebuah lintasan di graph G dengan panjang 4.
- 4) Barisan $(v_1, e_1, v_2, e_4, v_5, e_9, v_8, e_{12}, v_9, e_{10}, v_6, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_1)$ adalah sebuah jejak tertutup (sirkuit) di G dengan panjang 8. Jejak tutup ini bukan siklus karena titik internal v_5 Muncul lebih dari satu kali. Sirkuit $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_{13}, v_2, e_4, v_5, e_{14}, v_3, e_5, v_6, e_7, v_5, e_9, v_8, e_{16}, v_6, e_{10}, v_9, e_{12}, v_8, e_{11}, v_7, e_8, v_4, e_6, v_5, e_{15}, v_4, e_3, v_1)$ adalah sebuah sirkuit Euler di G. Jadi G adalah graph Euler.
- 5) Barisan $(v_1, e_3, v_4, e_6, v_5, e_4, v_2, e_1, v_1)$ adalah sebuah siklus di G dengan panjang 4. Siklus $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_{14}, v_5, e_7, v_6, e_{10}, v_9, e_{12}, v_8, e_{11}, v_7, e_8, v_4, e_3, v_1)$ memuat semua titik di G, jadi siklus tersebut merupakan siklus Hamilton. Dengan demikian graph G merupakan graph Hamilton.

b. Latihan 4.2

1. Gambarlah graph komplit dengan 7 titik. Kemudian tentukan panjang siklus yang mungkin terdapat pada graph tersebut. Apakah graph ini graph Hamilton? Graph Euler?
2. Gambarlah sebuah graph G yang
 - a. Mempunyai lima titik, tanpa siklus, dan terhubung
 - b. Mempunyai enam titik, dua komponen
 - c. Mempunyai sepuluh titik, delapan sisi, tiga komponen, tepat satu siklus.

c. Rangkuman 4.2

1. Sebuah jalan (walk) di G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i , untuk $1 \leq i \leq k$. Kita katakan W adalah sebuah jalan dari titik v_0 ke titik v_k , atau jalan- (v_0, v_k) .
2. Panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W .
3. Jika semua sisi $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ dan jalan W berbeda, maka W disebut sebuah jejak (trail).
4. Jika semua titik $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ dalam jalan W juga berbeda, maka W disebut lintasan (path).
5. Sebuah jalan W dengan panjang positif disebut tertutup, jika titik awal dan titik akhir dari W identik (sama). Jejak tutup disebut sirkuit.
6. Sebuah sirkuit di graph G yang memuat semua sisi disebut sirkuit Euler. Sebuah graph yang memuat sirkuit Euler disebut graph Euler.
7. Sebuah siklus (cycle) adalah sebuah jejak tertutup (closed trail) yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda.
8. Sebuah siklus yang memuat semua titik sebuah graph disebut siklus Hamilton. Graph yang memuat siklus Hamilton disebut graph Hamilton.

d. Tes Formatif 4.2

1. Jelaskan perbedaan antara jejak dan lintasan!
2. Jelaskan yang di maksud dengan graph hamilton!
3. Jelaskan yang dimaksud dengan graph Euler!

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 4.2

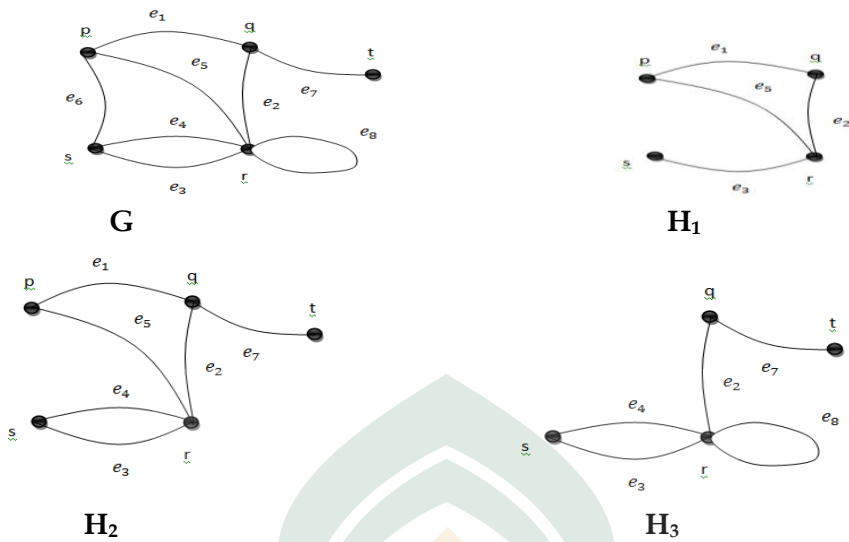
1. Jika semua sisi $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ dan jalan W berbeda, maka W disebut sebuah jejak (trail) sedangkan Jika semua titik $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ dalam jalan W juga berbeda, maka W disebut lintasan (path).
2. Sebuah siklus yang memuat semua titik sebuah graph disebut siklus Hamilton. Graph yang memuat siklus Hamilton disebut graph Hamilton.
3. Sebuah sirkuit di graph G yang memuat semua sisi disebut sirkuit Euler. Sebuah graph yang memuat sirkuit Euler disebut graph Euler.

Kegiatan Belajar 3

a. Materi Perkuliahan 4.3

Graph Bagian

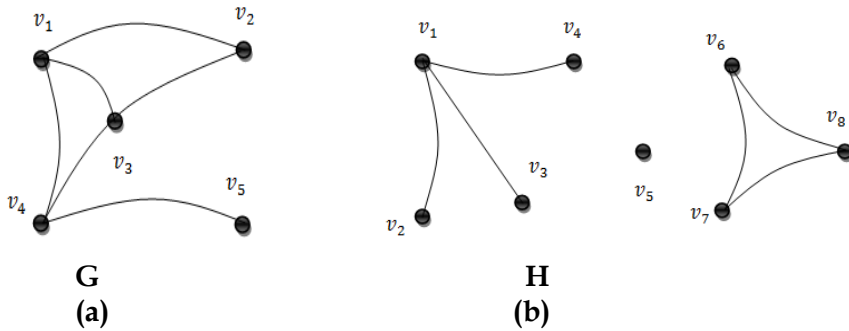
Sebuah graph H disebut **graph bagian** dari graph G , ditulis $H \subset G$, jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$. Jika $H \subset G$ dan $V(H) = V(G)$, maka H disebut **graph bagian rentang (spanning sub graph)** dari G . Misalkan $V \subset V(G)$. Graph bagian dari G yang dibangun (diinduksi) oleh V , dilambangkan dengan $G[V]$ adalah sebuah graph bagian dari G yang himpunan titiknya adalah V dan himpunan sisinya beranggotakan semua sisi G yang mempunyai titik-titik akhir di V . Pada Gambar 4.3.1, graph H_1 adalah graph bagian G ; graph H_2 adalah graph bagian rentang G ; dan H_3 adalah graph bagian G yang dibangun oleh $V = \{q, r, s, t\}$.



Gambar 4.3.1 : H_1 graph bagian G ; H_2 graph bagian rentang G ; H_3 graph bagian G dibangun oleh $V=\{q,r,s,t\}$.

Graph Terhubung dan Komponen Graph

Selanjutnya, dengan menggunakan konsep lintasan, kita definisikan keterhubungan sebuah graph. Sebuah graph G dikatakan **terhubung (connected)** jika untuk setiap dua titik G yang berbeda terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sebaliknya graph G disebut **tidak terhubung (disconnected)**. Sebuah **komponen** graph G adalah sebuah graph bagian terhubung maksimal (titik dan sisi) dari G . Graph H dikatakan graph bagian terhubung maksimal dari graph G , jika tidak ada graph bagian lain dari G yang terhubung dan memuat H . Jadi setiap graph terhubung memiliki tepat satu komponen sedangkan graph tak terhubung memiliki paling sedikit dua komponen.

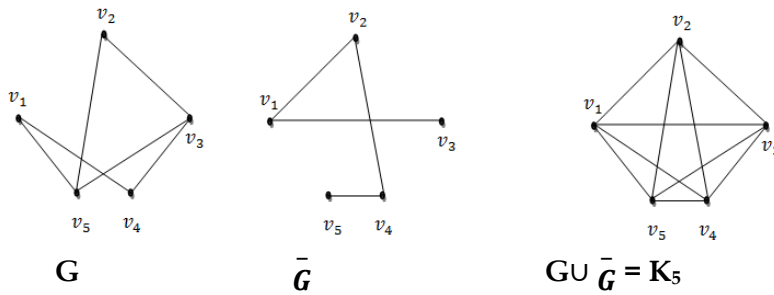


Gambar 4.3.2: (a) G graph terhubung; (b) H graph tidak terhubung dengan 3 komponen, yaitu G_1, G_2, G_3 .

Perhatikan graph G pada Gambar 4.3.2.(a) merupakan graph terhubung karena setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh sebuah lintasan. Sedangkan graph H pada Gambar 4.3.2. (b) merupakan graph tidak terhubung, karena tidak ada lintasan dari v_1 ke v_6 di H. Dalam hal ini G_1, G_2 dan G_3 adalah komponen-komponen H.

Komplemen Graph

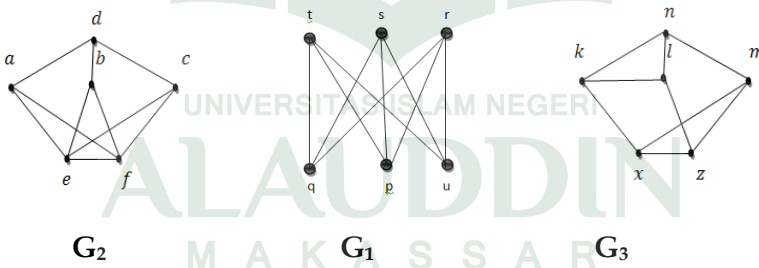
Misalkan G sebuah graph sederhana. **Komplemen G** , dilambangkan dengan \bar{G} , adalah graph sederhana yang himpunan titiknya sama dengan himpunan titik G dan dua titik u dan v di \bar{G} berhubungan langsung jika dan hanya jika di G titik u dan v tidak berhubungan langsung. Misalkan $G=(V(G),E(G))$ dan $H=(V(H),E(H))$ dua graph. Maka **gabungan G dengan H** dinotasikan $G \cup H$, adalah graph dengan himpunan titik $V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G) \cup E(H)$. Dengan demikian, **jika G graph sederhana dengan n titik**, maka $G \cup \bar{G} = K_n$. Contoh graph G, \bar{G} Dan $G \cup \bar{G}$ Dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 4.3.3 : Graph G , komplemen G (\bar{G}), dan $G \cup \bar{G}$

Isomorfisme Pada Graph

Dua graph G dan H dikatakan **isomorfik**, ditulis $G \cong H$, jika: (i) terdapat korespondensi satu-satu antara $V(G)$ dan $V(H)$; (ii) banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik u dan v di G , sama dengan banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik di H yang berkorespondensi dengan titik u dan titik v . Misalnya pada Gambar 4.3.4, graph G_1 Isomorfik dengan graph G_2 Lewat korespondensi berikut : $a \leftrightarrow t$, $b \leftrightarrow s$, $c \leftrightarrow r$, $d \leftrightarrow q$, $e \leftrightarrow p$, $f \leftrightarrow u$. Sedangkan graph G_3 Tidak isomorfik dengan graph G_1 Maupun G_2 , karena graph G_3 Memuat siklus dengan panjang 3.



Gambar 4.3.4: Graph G_1 isomorfik graph G_2 ; G_1 tidak isomorfik G_3

Sebagai akibat dari definisi di atas, diperoleh pernyataan berikut. **Jika G dan H dua graph isomorfik, maka $|V(G)| = |V(H)|$ dan $|E(G)| = |E(H)|$.** Tetapi konversi pernyataan tersebut tidak benar.

Derajat Titik Graph

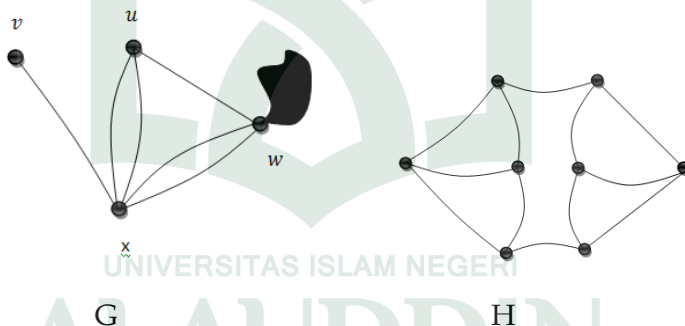
Misalkan G sebuah graph dan v sebuah titik di G . Derajat titik v , dilambangkan dengan $d_g(v)$ atau $d(v)$, adalah banyaknya sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan setiap gelung dihitung dua kali). Derajat minimum G , dilambangkan dengan $\delta(G)$ dengan didefinisikan sebagai berikut:

$$\delta(G) = \text{minimum } \{d(v) / v \in V(G)\}.$$

Sedangkan derajat maksimum G , dilambangkan dengan $\Delta(G)$, didefinisikan sebagai berikut :

$$\Delta(G) = \text{maksimum } \{d(v) / v \in V(G)\}.$$

Graph G disebut **graph beraturan- k** jika setiap titik G berderajat k . Misalnya, graph komplit dengan n titik adalah graph beraturan- $(n-1)$. Sikel dengan n titik, C_n , adalah graph beraturan-2. Graph H pada Gambar 4.3.5 adalah graph beraturan-3. Perhatikan bahwa jika G graph beraturan, maka $\delta(G) = \Delta(G)$.



Gambar 4.3.5 : (a) Graph G dengan $d(u) = 3$, $d(v) = 1$, $d(w) = 5$, $d(x) = 5$, $\delta(G) = 1$, $\Delta(G) = 5$ (b) Graph H beraturan-3, $\delta(H) = 3 = \Delta(H)$.

Karena dalam menghitung jumlah derajat semua titik di sebuah graph, setiap sisi graph dihitung tepat dua kali, maka jumlah derajat semua titik graph selalu sama dengan dua kali banyaknya sisi graph tersebut. Pernyataan ini merupakan teorema pertama dalam teori graph, dan dikenal dengan sebutan ‘Teorema Jabat Tangan’.

Teorema 4.3.1 : (Teorema Jabat Tangan'). Jika G sebuah graph maka

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

Sebagai akibat dari teorema tersebut adalah teorema berikut.

Teorema 4.3.2 :

Banyaknya titik berderajat ganjil pada sebuah graph adalah genap.

Bukti :

Pandang sembarang graph G . Misalkan A dan B berturut-turut, adalah himpunan semua titik G yang berderajat genap dan ganjil. Jelas bahwa $V(G) = A \cup B$. Sehingga,

$$\sum_{v \in A} d(v) + \sum_{v \in B} d(v) = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| \quad (\text{Teorema 4.3.1})$$

Selanjutnya, karena untuk setiap $v \in A$, $d(v)$ genap, maka $\sum_{v \in A} d(v)$ Genap. Akibatnya $\sum_{v \in B} d(v)$ Genap. Padahal untuk setiap titik $v \in B$, $d(v)$ ganjil. Akibatnya banyaknya titik di B atau $|B|$ genap. Terbukti.

Perhatikan bahwa **jika graph G beraturan- k dengan n titik, maka nk genap**. Kiranya jelas bahwa tidak ada graph beraturan- k dengan n titik jika n dan k kedua-duanya bilangan ganjil..

b. Latihan 4.3

1. Apakah graph beraturan-3 dengan 9 titik? Mengapa?
2. Berapakah banyaknya sisi dari graph beraturan- k dengan n titik?
3. Sebuah graph G mempunyai 20 sisi. Jika setiap titik di G mempunyai derajat paling sedikit 4, tentukan maksimum banyaknya titik G .
4. Tunjukkan bahwa jika G adalah graph yang mempunyai tepat dua titik berderajat ganjil, maka kedua titik yang berderajat ganjil tersebut harus terletak pada komponen yang sama.

c. Rangkuman 4.3

1. Sebuah graph H disebut **graph bagian** dari graph G , ditulis $H \subset G$, jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$.
2. Jika $H \subset G$ dan $V(H) = V(G)$, maka H disebut **graph bagian rentang (spanning sub graph)** dari G . Misalkan $V \subset V(G)$.
3. Graph bagian dari G yang dibangun (diinduksi) oleh V , dilambangkan dengan $G[V]$ adalah sebuah graph bagian dari G yang himpunan titiknya adalah V dan himpunan sisinya beranggotakan semua sisi G yang mempunyai titik-titik akhir di V .
4. Sebuah graph G dikatakan terhubung (connected) jika untuk setiap dua titik G yang berbeda terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sebaliknya graph G disebut tidak terhubung (disconnected).
5. Dua graph G dan H dikatakan isomorfik, ditulis $G \cong H$, jika: (i) terdapat korespondensi satu-satu antara $V(G)$ dan $V(H)$; (ii) banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik u dan v di G , sama dengan banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik di H yang berkorespondensi dengan titik u dan titik v .
6. Misalkan G sebuah graph dan v sebuah titik di G . Derajat titik v , dilambangkan dengan $d_g(v)$ atau $d(v)$, adalah banyaknya sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan setiap gelung dihitung dua kali).

d. Tes Formatif 4.3

1. Apakah ada graph sederhana dengan satu titik terhubung
2. Apakah barisan-barisan berikut merupakan barisan derajat sebuah graph? Mengapa?
 - a. (6, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2)
 - b. (5, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 0)
 - c. (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)
 - d. (5, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 0)
3. Mungkinkah dalam suatu pesta yang hadir 19 orang, masing-masing yang hadir mengetahui tepat 5 orang yang lainnya? Mengapa?

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 4.3

1. Iya ada karena graph sederhana adalah grap yang tidak memiliki loop dan sisi rangkap.
2. a. (6, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2)
Bukan merupakan barisan derajat dari suatu graph. Karena banyaknya suku yang berderajat ganjil ada 3 yaitu 5, 3, dan 3.
- b. (5, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 0)
Merupakan barisan derajat dari suatu graph, karena memiliki ciri-ciri barisan derajat yaitu monoton turun, jumlah sukunya genap, banyaknya suku yang bernilai ganjil sebanyak genap.
- c. (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)
Merupakan derajat dari suatu graph, karena jumlah sukunya genap dan banyaknya suku yang bernilai ganjil adalah genap.
- d. (5, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 0)
Bukan merupakan barisan derajat dari suatu graph, karena banyaknya suku yang berderajat ganjil adalah 5 yaitu 5, 3, 3, 3 dan 3.
3. Tidak mungkin, karena hal tersebut bertentangan dengan “teorema jabat tangan” yang menyatakan bahwa “banyaknya titik yang berderajat ganjil dalam suatu graph adalah genap”. Sedangkan pada masalah kita ada 19 orang (titik) yang artinya ganjil.

BAB V

MASALAH LINTASAN TERPENDEK

A. GAMBARAN SINGKAT MENGENAI MATERI KULIAH

Materi kuliah ini membahas tentang jarak dua titik pada graph, Algoritma Dijkstra, contoh lintasan terpendek dalam kehidupan sehari-hari.

B. PEDOMAN MEMPELAJARI MATERI

Baca dengan baik uraian mengenai jarak dua titik pada graph, Algoritma Dijkstra, contoh lintasan terpendek dalam kehidupan sehari-hari.. Kemudian mengerti tentang jarak dua titik pada graph, Algoritma Dijkstra, contoh lintasan terpendek dalam kehidupan sehari-hari dan membuat contoh lain tentang lintasan terpendek dalam kehidupan sehari-hari dengan menggunakan algoritma dijkstra.

C. TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian jarak dua titik pada graph.
2. Mahasiswa dapat menjelaskan panjang lintasan dalam sebuah graph-bobot.
3. Mahasiswa dapat menjelaskan algoritma dijkstra.
4. Mahasiswa dapat mencari lintasan terpendek antara dua titik disuatu graph berbobot.
5. Mahasiswa dapat mencari lintasan terpendek antara dua titik disuatu graph berbobot dengan menggunakan algoritma dijkstra.
6. Mahasiswa dapat menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari untuk mencari lintasan terpendek antara dua titik dengan menggunakan algoritma dijkstra

D. KEGIATAN BELAJAR

Kegiatan Belajar 1

a. Materi Perkuliahan 5.1

Pendahuluan

Rute perjalanan nabi saat hijrah ke Madinah (dulu namanya Yatsrib) adalah rute perjalanan yang sangat bersejarah. Perjalanan Nabi Muhammad saw dari Makkah ke Madinah mengalami banyak kesulitan dan hambatan. Al Qur'an mengabadikan kesulitan dan hambatan perjalanan tersebut dalam surah Al Anfaal ayat 30,

وَإِذْ يَمْكُرُ بِكَ الَّذِينَ كَفَرُوا لِيُثْبِتُوكَ أَوْ يَقْتُلُوكَ أَوْ يُخْرِجُوكَ وَيَمْكُرُونَ
وَيَمْكُرُ اللَّهُ وَاللَّهُ خَيْرُ الْمَكْرِينَ ﴿٣٠﴾

Terjemahnya:

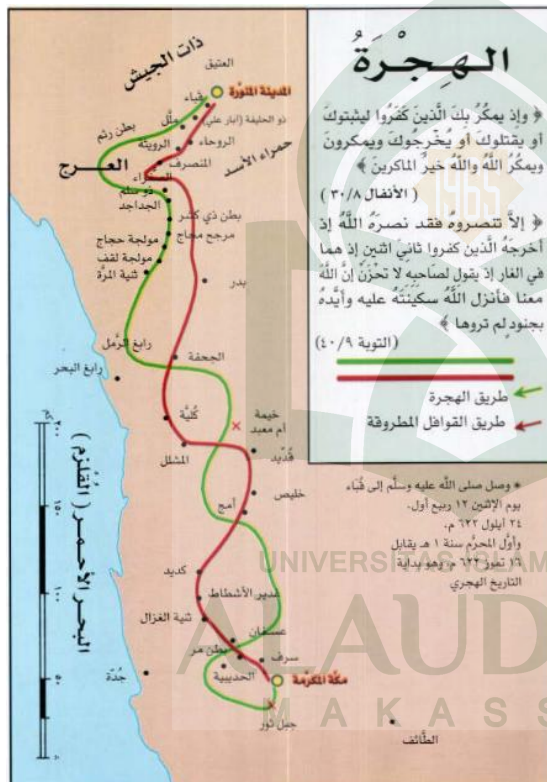
Dan (ingatlah), ketika orang-orang kafir (Quraisy) memikirkan daya upaya terhadapmu untuk menangkap dan memenjarakanmu atau membunuhmu, atau mengusirmu. Mereka memikirkan tipu daya dan Allah menggagalkan tipu daya itu. Dan Allah sebaik-baik pembalas tipu daya. (QS. 8:30)

dan surah At Taubah ayat 40.

إِلَّا تَنْصُرُوهُ فَقَدْ نَصَرَهُ اللَّهُ إِذْ أَخْرَجَهُ الَّذِينَ كَفَرُوا ثَانِيَ اثْنَيْنِ إِذْ
هُمَا فِي الْغَارِ إِذْ يَقُولُ لِصَاحِبِهِ لَا تَحْزَنْ إِنَّ اللَّهَ مَعَنَا فَأَنْزَلَ اللَّهُ
سَكِينَتَهُ عَلَيْهِ وَأَيَّدَهُ بِجُنُودٍ لَمْ تَرَوْهَا وَجَعَلَ كَلِمَةَ الَّذِينَ
كَفَرُوا السُّفْلَى وَكَلِمَةَ اللَّهِ هِيَ الْعُلْيَا وَاللَّهُ عَزِيزٌ حَكِيمٌ ﴿٤٠﴾

Terjemahnya:

Jikalau kamu tidak menolongnya (Muhammad) maka sesungguhnya Allah telah menolongnya (yaitu) ketika orang-orang kafir (musyrikin Mekah) mengeluarkannya (dari Mekah) sedang dia salah seorang dari dua orang ketika keduanya berada dalam gua, di waktu dia berkata kepada temannya: "Janganlah kamu berduka cita, sesungguhnya Allah beserta kita." Maka Allah menurunkan ketenangan-Nya kepada (Muhammad) dan membantunya dengan tentara yang kamu tidak melihatnya, dan Allah menjadikan seruan orang-orang kafir itulah yang rendah. Dan kalimat Allah itulah yang tinggi. Allah Maha Perkasa lagi Maha Bijaksana. (QS. 9:40)



Karena Rasulullah saw sangat dicari oleh orang quraish pada saat itu, maka rasulullah bersama rombongannya melalui jalan yang tidak biasa dilalui oleh orang lain. Sehingga dapat dilihat pada peta (Gambar 5.1.1) di samping terdapat dua jalur dari Makkah ke Madinah, yaitu jalur yang dilalui oleh Nabi Muhammad saw. pada saat hijrah (warna hijau) dan jalur yang biasanya dilalui oleh orang lain (warna merah). Pada gambar terlihat bahwa ada beberapa titik dimana garis

Gambar 5.1.1. Peta dari Mekkah ke Madinah

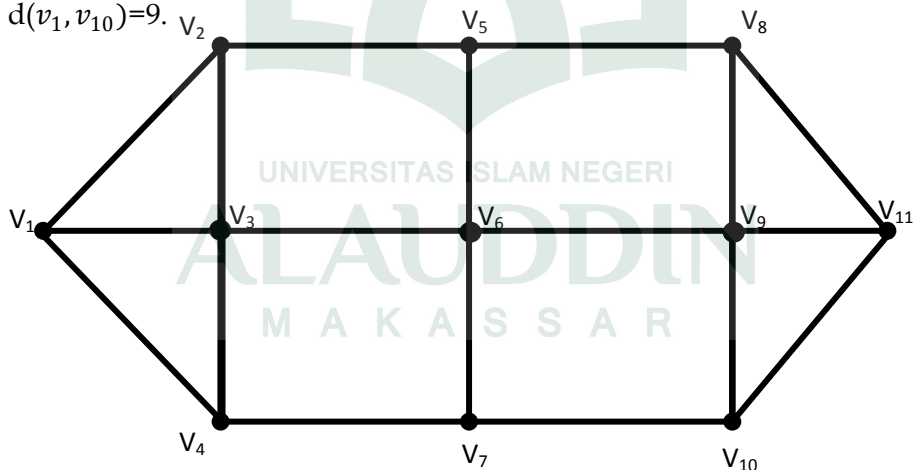
hijau bertemu (berpotongan) dengan garis merah. Dalam matematika diskrit dua jalur perjalanan dari Makkah ke Madinah dapat diilustrasikan dengan teori Graph. Jika diketahui jarak masing-masing jalur dari antara dua titik potong yang berdekatan, maka dapat digambarkan sebagai graph berbobot. Dengan demikian dari kisah

sejarah Nabi ini dapat dibuat lintasan terpendek menggunakan teori Graph dalam hal ini Algoritma Dijkstra.

Jarak Dua Titik Pada Graph

Pembahasan sebelumnya telah dibahas Graph-bobot G , yaitu graph yang setiap sisinya dikaitkan dengan bilangan real. Jika e sebuah sisi pada graph-bobot G , maka bilangan yang dikaitkan dengan sisi e disebut bobot sisi e dan dilambangkan dengan $w(e)$.

Panjang lintasan dalam sebuah graph-bobot adalah jumlah bobot semua sisi pada lintasan tersebut. Misalkan u dan v dua titik di graph G . Lintasan- $(u-v)$ di G dengan panjang minimum disebut lintasan terpendek antara u dan v . Sedangkan **jarak dari u ke v** , dinotasikan dengan $d_G(u,v)$ atau $d(u,v)$, didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek antara titik u dan titik v di G . Sebagai contoh, perhatikan graph-bobot G pada Gambar 5.1.2 berikut. Lintasan terpendek yang menghubungkan titik v_1 dan v_5 di graph-bobot G adalah lintasan $(v_1, v_4, v_7, v_6, v_5)$ dengan panjang $1 + 2 + 2 + 2 = 7$. Dengan demikian $d(v_1, v_5) = 7$. Begitu juga, lintasan terpendek dari titik v_1 ke v_{10} adalah lintasan (v_1, v_4, v_7, v_{10}) dengan panjang $1 + 2 + 6 = 9$. Sehingga jarak titik v_1 dan v_{10} dari graph G adalah 9, atau $d(v_1, v_{10}) = 9$.



Gambar 5.1.2 : Graph-bobot G

Perhatikan kembali graph-bobot G pada Gambar 5.1.2. Misalkan titik di graph tersebut mewakili kota, sisi mewakili jalan langsung yang menghubungkan dua kota, dan bobot sisi menyatakan panjang jalan yang diwakili oleh sisi tersebut. Misalkan kita berada di kota yang diwakili oleh titik v_1 dan ingin bepergian dengan mobil ke kota yang diwakili oleh titik v_{11} . Ada beberapa lintasan yang bisa kita tempuh, misalkan lintasan $P_1 = (v_1, v_2, v_5, v_8, v_{11})$; $P_2 = (v_1, v_3, v_6, v_9, v_{11})$; $P_3 = (v_1, v_4, v_7, v_{10}, v_{11})$; and $P_4 = (v_1, v_4, v_7, v_6, v_9, v_{11})$; yang secara berturut-turut panjangnya 14, 15, 14 dan 13. Tentu saja dari segi aplikasi diantara keempat lintasan tersebut, lintasan P_4 yang paling menguntungkan. Adakah lintasan dari v_1 ke v_{11} yang lebih pendek dari keempat lintasan tersebut ? **Persoalan pokok yang dibicarakan disini adalah bagaimana mencari lintasan terpendek antara dua titik di suatu graph-bobot ?**. Bisa saja mendaftar semua lintasan yang menghubungkan dua titik tersebut, kemudian dicari lintasan yang mempunyai bobot terkecil. Tentu saja hal ini sangat tidak efisien, terlebih jika graph tersebut memiliki banyak titik dan banyak sisi. Berikut akan dibahas sebuah algoritma untuk mencari lintasan terpendek pada suatu graph.

Algoritma Dijkstra

Untuk mencari panjang lintasan terpendek dari sebuah titik s ke sebuah titik t di graph-bobot G , dimana bobot setiap sisi G adalah bilangan positif, gunakan algoritma yang dikembangkan oleh Dijkstra (1959).

Algoritma Dijkstra

Input : Graph bobot G dengan $s, t \in V(G)$

Step 1 : Label titik dengan $\lambda(s)=0$ dan untuk setiap titik di G selain s , label titik v dengan $\lambda(v)=\infty$. (dalam praktek ∞ diganti dengan bilangan yang “sangat besar”).

Step 2 : Misalkan $u \in T$ dengan $\lambda(u)$ minimum.

Step 3 : Jika $u=t$, STOP, dan beri pesan: “ Panjang lintasan terpendek dari s ke t adalah $\lambda(t)$ ”.

Step 4 : Untuk setiap sisi $e=uv$, $v \in T$; ganti label v dengan $\lambda(v) = \text{minimum}\{\lambda(v), \lambda(u)+w(e)\}$.

Step 5 : Tulis $T = T - \{u\}$, dan kembali ke Step 2.

Teorema 5.1.1 :

Dalam algoritma Dijkstra, jika nilai $\lambda(v)$ berhingga untuk setiap titik v di graph G , maka terdapat lintasan dari s ke v dengan panjang $\lambda(v)$.

Bukti :

jika $v=s$, maka $\lambda(v)=0$ dan jelas lintasan dari s ke v mempunyai panjang 0. Sehingga teorema berlaku untuk $v = s$. Misalkan $v \neq s$. Karena $\lambda(v)$ berhingga, maka (dari Step2) terdapat titik u_1 Sedemikian hingga $e_1 = v u_1 \in E(G)$ dan nilai $\lambda(v) = \lambda(u_1) + w(e_1)$. Segera setelah titik v dilabel $\lambda(v)$, Step 5 dijalankan untuk melabel u dengan label permanen. Juga Step 2 dan 4 berakibat bahwa begitu sebuah titik dilabel permanen, maka label itu tetap untuk seterusnya. Karena $\lambda(u_1)$ berhingga, kita dapat ulangi proses di atas untuk mendapatkan u_2 Yang berhubungan langsung dengan titik u_1 Yang dihubungkan oleh sisi e_2 Sedemikian hingga $\lambda(u_1) = \lambda(u_2) + w(e_2)$. Teruskan proses ini “mundur”, sampai kita dapatkan titik s . Maka barisan titik dan sisi $(v, e_1, u_1, e_2, u_2, e_3, \dots, e_n, s)$ membentuk lintasan dari v ke s dengan panjang $\lambda(v)$ karena :

$$\begin{aligned} \Lambda(v) &= \lambda(u_1) + w(e_1) \\ &= \lambda(u_2) + w(e_2) + w(e_1) \\ &= \lambda(u_3) + w(e_3) + w(e_2) + w(e_1) \\ &\vdots \\ &= \lambda(s) + w(e_n) + \dots + w(e_1) \\ &= w(e_n) + \dots + w(e_1) \end{aligned}$$

Dengan demikian teorema terbukti.

Dalam teorema berikut, kita lambangkan dengan panjang lintasan terpendek dari s ke v di graph G . Kita tulis $\delta(v) = \infty$, jika tidak ada lintasan dari titik s ke titik v di graph G .

Teorema 5.1.2:

Dalam algoritma Dijkstra, jika titik u di graph G dilabel permanen $\lambda(u)$, maka $\delta(u) = \lambda(u)$.

Bukti :

Kita gunakan induksi pada urutan titik-titik yang dilabel permanen. Titik G yang pertama-tama dilabel permanen adalah titik $u=s$. Karena $\lambda(s) = 0 = \lambda(s)$, jelas pernyataan di atas benar untuk kasus ini. Misalnya, u adalah sebuah titik selain s dan pernyataan teorema benar untuk semua titik yang telah dilabel permanen senelum u .

Misalkan label permanen dari u adalah $\lambda(u) = \infty$. Karena label permanen dari s adalah $\lambda(s) = 0$ (berhingga), ada sebuah titik u' ($u' \neq s$) yang dilabel permanen dengan $\lambda(u') = \infty$. Sebelum melabel permanen u dengan $\lambda(u) = \infty$, perhatikan bahwa disaat memilih u' di Step 2, semua titik v yang lain yang belum dilabel permanen mempunyai label $\lambda(v) = \infty$. Karena u' adalah pertama dilabel permanen $\lambda(u') = \infty$, semua titik v' yang telah dilabel permanen sebelum u' mempunyai label $\lambda(v')$ Berhingga. Ini berarti tidak ada sisi yang menghubungkan v' dengan u' ataupun v , sebab jika ada, label u' atau v' akan berhingga. Jadi tidak ada lintasan dari s ke u . Sehingga $\delta(u) = \lambda(u) = \infty$. Sekarang misalkan label permanen dari u adalah $\lambda(u) \neq \infty$ (berhingga). Dari teorema sebelumnya, terdapat lintasan dari s ke u dengan panjang $\lambda(u)$. Sehingga $\lambda(u) \geq \delta(u)$. Akan ditunjukkan bahwa $\lambda(u) > \delta(u)$ Tidak mungkin. Misalkan $P = (s=v_0, v_1, \dots, v_k = u)$ sebuah lintasan terpendek dari s ke u . Notasikan dengan $e_i = v_{i-1} v_i$, $1 \leq i \leq k$, sisi dari P . Maka

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^k W(e_i).$$

Misalkan v_j adalah titik terakhir di P yang dilabel permanen sebelum u . Maka berdasarkan induksi hipotesis,

$$\Lambda(v_j) = \sum_{i=1}^j W(e_i) = \delta(v_j).$$

Jika $v_{j+1} \neq u$, maka $\lambda(v_{j+1}) \leq \lambda(v_j) + w(E_{j+1}) \dots\dots\dots(\text{Step 4})$

Sehingga

$$\begin{aligned} \lambda(v_{j+1}) &\leq \lambda(v_j) + w(E_{j+1}) \\ &= \delta(v_j) + w(E_{j+1}) \\ &= \delta(v_{j+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{j+1} W(e_i) \\ &= \delta(u) \end{aligned}$$

Andaikan $\lambda(u) > \delta(u)$, maka $\lambda(v_{j+1}) \leq \delta(u) < \lambda(u)$. Ini bertentangan dengan $(v_{j+1}) \geq \lambda(u)$ Karena v_{j+1} Tidak dil, haruslah abel permanen sebelum u .

Jadi, jika $v_{j+1} \neq u$, haruslah $\lambda(u) = \delta(u)$, seperti yang diminta.

Selanjutnya, jika $v_{j+1} = u$, maka

$$\begin{aligned} \lambda(u) &= \lambda(v_{j+1}) \leq \lambda(v_j) + w(E_{j+1}) \\ &= \delta(v_j) + w(E_{j+1}) \\ &= \delta(v_{j+1}) \\ &= \delta(u). \end{aligned}$$

Karena $\lambda(u) \delta(u)$ Dan $\lambda(u) \delta(u)$, haruslah $\lambda(u) = \delta(u)$. Dengan demikian lengkaplah bukti teorema.

Sekarang kita terapkan algoritma Dijkstra untuk mencari panjang linatasan terpendek dari titik v_1 ke v_{11} di graph-bobot G pada Gambar 5.1.2

Pertama-tama (menurut Step 1) kita label v_1 dengan $\lambda(v_1)=0$ dan untuk setiap $i, 2 \leq i \leq 11$, label v_i dengan $\lambda(v_i)=\infty$. Selanjutnya tuils $T \{$

v_1, v_2, \dots, v_{11} . Kita pandang T sebagai himpunan titik-titik di G dan himpunan T dapat dilihat di tabel berikut.

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
T	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6		v_7	v_8	v_9	v_{10} v_{11}

Jelas terlihat bahwa titik T yang mempunyai minimum adalah v_1 , sehingga menurut Step 2, $u=v_1$.

Karena $u \neq v_{11}$, kita pergi ke Step 4. Terdapat 3 sisi G yang terkait dengan v_1 Yaitu $v_1 v_2$, $v_1 v_3$, dan $v_1 v_4$ Sedemikian sehingga v_2 , v_3 , dan v_4 di T (dengan kata lain v_2 , v_3 , dan v_4 Belum dilabel permanen).

Karena

$$\lambda(v_2) = \infty > 0 + 3 = \lambda(v_1) + w(v_1 v_2),$$

Ganti label v_2 Dengan $\lambda(v_2) = 3$

Begitu pula karena

$$\lambda(v_3) = 8 > 0 + 2 = \lambda(v_1) + w(v_1 v_3),$$

Ganti label v_3 Dengan $\lambda(v_3) = 2$.

Selanjutnya dengan alasan yang sama, ganti label v_4 Dengan $\lambda(v_4) = 1$.

Step 5 : Ganti T dengan $T-\{v_1\}$.

Pada tahap ini kita katakan bahwa titik v_1 Telah dilabel permanen dengan label $\lambda(v_1) = 0$. Sehingga label titik G dan himpunan T yang baru dapat dilihat di tabel berikut :

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
T	—	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

Selanjutnya kita pergi ke Step 2. Karena v_4 Adalah titik di T dengan label minimum, maka $u = v_4$. Karena $u \neq v_{11}$, kita pergi ke Step 4. Terdapat dua sisi G yang terkait dengan v_4 yaitu $v_4 v_3$ dan $v_4 v_7$

sedemikian sehingga v_3 Dan v_7 di T (Perhatikan sisi v_4v_1 juga terkait dengan titik v_4 , tetapi $v_1 \notin T$).

Karena $\lambda(v_3) = 2 < 1 + 5 = \lambda(v_4) + w(v_4v_3)$

Maka label titik v_3 tetap yaitu $\lambda(v_3) = 2$

Karena :

$\lambda(v_7) = \infty > 1 + 2 = \lambda(v_4) + w(v_4v_7)$,

Ganti label v_7 dengan $\lambda(v_7) = 3$.

Step 5 : Ganti T dengan $T - \{v_4\}$.

Titik v_4 Telah mendapat label permanen $\lambda(v_4) = 1$. Sehingga label baru menjadi seperti berikut

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
T	—	$\cancel{v_2}$	$\cancel{v_3}$	—	$\cancel{v_5}$	$\cancel{v_6}$	$\cancel{v_7}$	$\cancel{v_8}$	$\cancel{v_9}$	$\cancel{v_{10}}$	$\cancel{v_{11}}$

Selanjutnya ke Step 2. Karena $\cancel{v_7}$ Adalah titik di T berlabel minimum, maka $u = \cancel{v_7}$. Pergi ke Step 4. Terdapat dua titik T yang brhubungan langsung dengan $\cancel{v_7}$ Yaitu $\cancel{v_5}$ Dan $\cancel{v_8}$.

Karena :

$\lambda(\cancel{v_5}) = 3 < 2 + 4 = \lambda(\cancel{v_3}) + w(\cancel{v_3}\cancel{v_5})$

Label $\cancel{v_5}$ Tetap yaitu $\lambda(\cancel{v_5}) = 3$

Karena :

$\lambda(\cancel{v_8}) = \infty > 2 + 5 = \lambda(v_3) + w(v_3v_6)$,

Ganti label v_6 dengan $\lambda(v_6) = 7$.

Step 5 : Ganti T dengan $T - \{v_3\}$.

Titik v_3 Telah mendapat label permanen $\lambda(v_3) = 2$. Sehingga label baru menjadi seperti berikut

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	∞	7	3	∞	∞	∞	∞
T	—	v_2	—	—	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

Dari tabel terakhir kita lihat , v_2 Adalah salah satu titik di T yang mempunyai label minimum yaitu $\lambda(v_2) = 3$. Maka berdasarkan Step 2, kita peroleh $u = v_2$ Pergi ke Step 4, hanya ada satu titik T, yaitu v_5 yang berhubungan langsung dengan v_2 .

Karena :

$$\lambda(v_5) = \infty > 3 + 5 = \lambda(v_2) + w(v_2 v_5),$$

Ganti label v_5 dengan $\lambda(v_5) = 8$.

Step 5 : Ganti T dengan $T - \{v_2\}$.

Titik v_2 Telah mendapat label permanen $\lambda(v_2) = 3$. Sehingga label baru menjadi seperti berikut

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	8	7	3	∞	∞	∞	∞
T	—	—	—	—	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

Maka berdasarkan Step 2, kita peroleh $u = v_7$ Pergi ke Step 4, hanya ada dua titik T, yaitu v_6 Dan v_{10} Yang berhubungan langsung dengan v_7 .

Karena :

$$\lambda(v_6) = 7 > 3 + 2 = \lambda(v_7) + w(v_7 v_6)$$

Ganti label v_6 dengan $\lambda(v_6) = 5$

Karena :

$$\lambda(v_{10}) = \infty > 3 + 6 = \lambda(v_7) + w(v_7 v_{10}),$$

Ganti label v_{10} dengan $\lambda(v_{10}) = 9$.

Step 5 : Ganti T dengan $T - \{v_7\}$.

Titik v_7 Telah mendapat label permanen $\lambda(v_7) = 3$. Sehingga label baru menjadi seperti berikut

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	8	5	3	∞	∞	∞	∞
T	—	—	—	—	v_5	v_6	—	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

Kita lanjutkan dengan mengulangi proses di atas hingga tiba v_{11} dilabel permanen. Jika proses di atas dilanjutkan, maka secara berturut-turut akan diperoleh tabel berikut.

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	7	5	3	∞	11	9	∞
T	—	—	—	—	v_5	—	—	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	7	5	3	8	11	9	∞
T	—	—	—	—	—	—	—	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	7	5	3	8	10	9	∞
T	—	—	—	—	—	—	—	—	v_9	v_{10}	v_{11}

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	7	5	3	8	10	9	13
T	—	—	—	—	—	—	—	—	v_9	—	v_{11}

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	7	5	3	8	10	9	12
T	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	v_{11}

Titik v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
$\lambda(v_i)$	0	3	2	1	7	5	3	8	10	9	12
T	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Dari tabel terakhir kita lihat bahwa setiap titik di G , sudah dilabel permanen (karena $T = \emptyset$). Karena label permanen dari v_1 Ke v_{11} Adalah $\lambda(v_{11})=12$, panjang lintasan terpendek dari v_1 Ke v_{11} Di graph-bobot G adalah 12.

Untuk menentukan lintasan terpendek dari v_1 Ke v_{11} Dap[at dilakukan dengan “ metode telurus balik ” yaitu dari v_{11} Ke v_1 , perhatikan bahwa:

$$\lambda(v_{11})=12 = 10+2 = \lambda(v_9) + w(v_9v_{11}),$$

$$\lambda(v_9)=10 = 8+2 = \lambda(v_8) + w(v_8v_9),$$

$$\lambda(v_8)=8 = 7+1 = \lambda(v_5) + w(v_5v_8),$$

$$\lambda(v_5)=7 = 5+2 = \lambda(v_6) + w(v_6v_5),$$

$$\lambda(v_6)=5 = 3+2 = \lambda(v_7) + w(v_7v_6),$$

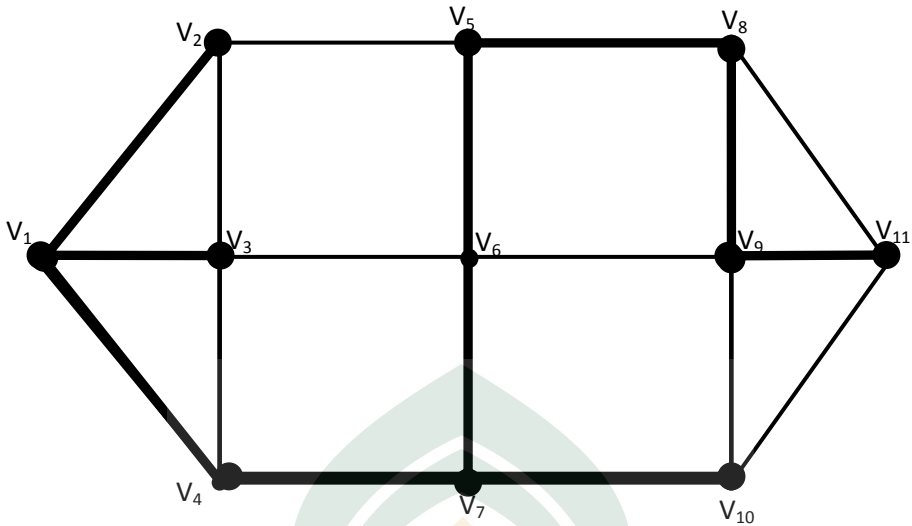
$$\lambda(v_7)=3 = 2+1 = \lambda(v_4) + w(v_4v_7),$$

$$\lambda(v_4)=1 = 0+1 = \lambda(v_1) + w(v_1v_4),$$

Jadi,

$$\lambda(v_{11})= w(v_1v_4) + w(v_4v_7) + w(v_7v_6) + w(v_6v_5) + w(v_5v_8) + w(v_8v_9) + w(v_9v_{11}).$$

Dengan demikian sebuah lintasan terpendek dengan panjang 12 dari v_1 Ke v_{11} Di graph bobot G adalah lintasan $(v_1, v_4, v_7, v_6, v_5, v_8, v_9, v_{11})$.



Gambar 5.1.3 : Lintasan terpendek dari titik v_1 Ke titik yang lain diperlihatkan pada graph dengan “garis tebal”.

Lintasan terpendek dari titik v_1 Ke v_i , $1= 1, 2, \dots, 11$, di graph bobot G diperlihatkan pada gambar dengan “garis tebal”; dan panjang lintasan terpendek tersebut adalah label titik v_i Atau $\lambda(v_i)$.

b. Latihan 5.1

1. Sebuah perusahaan elektronik mempunyai cabang di 7 kota besar $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$, dan K_7 . Harga tiket penerbangan langsung dari kota K_i ke kota K_j diberikan oleh unsur matriks B berikut yang terletak pada baris ke- i dan kolom ke- j (simbol ∞ berarti tidak ada penerbangan langsung). Saudara sebagai karyawan di perusahaan tersebut ditugasi untuk membuat sebuah tabel rute penerbangan termurah untuk setiap kota yang ada. Susunlah tabel yang dimaksud.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
K_1	0	60	70	∞	∞	∞	∞
K_2	60	0	50	50	20	∞	∞
K_3	70	50	0	40	∞	70	∞
K_4	∞	50	40	0	60	50	∞
K_5	∞	20	∞	60	0	30	40
K_6	∞	∞	70	50	30	0	50
K_7	∞	∞	∞	∞	40	50	0

2. Seekor kambing, seekor anjing dan seekor harimau, berada di satu tepi (sisi) sebuah sungai, dan seorang nelayan dengan perahu yang kecil ingin memindahkan ketiga binatang tersebut ke tepi yang lain. Karena kecilnya, perahu tersebut hanya mampu mengangkut nelayan dan paling banyak satu ekor binatang yang ada. Jika kambing dan harimau saja yang tinggal bersama di satu tepi sungai, maka harimau akan memakan kambing. Begitu juga, jika anjing dan kambing saja yang tinggal bersama di satu tepi sungai, maka anjing akan membunuh kambing. Bagaimanakah strategi yang dipakai nelayan agar semua binatang dipindahkan selamat dan banyaknya nelayan menyeberang sesedikit mungkin. Berapakah minimum banyaknya nelayan menyeberang?

c. Rangkuman 5.1

1. Graph-bobot G , yaitu graph yang setiap sisinya dikaitkan dengan bilangan real.
2. Algoritma dijkstra untuk mencari panjang lintasan terpendek dari sebuah titik s ke sebuah titik t di graph-bobot G , dimana bobot setiap sisi G adalah bilangan positif.
3. Panjang lintasan dalam sebuah graph-bobot adalah jumlah bobot semua sisi pada lintasan tersebut. Misalkan u dan v dua titik di graph G . Lintasan- $(u-v)$ di G dengan panjang minimum disebut lintasan terpendek antara u dan v . Sedangkan jarak dari u ke v , dinotasikan dengan $d_G(u,v)$ atau $d(u,v)$, didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek antara titik u dan titik v di G .

d. Tes Formatif 5.1

1. Apa kegunaan algoritma dijkstra? Berikan contoh dalam kehidupan sehari-hari!
2. Tuliskan langkah-langkah algoritma dijkstra!

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 5.1

1. Algoritma dijkstra digunakan untuk mencari panjang lintasan terpendek dari sebuah titik s ke sebuah titik t di graph-bobot G , dimana bobot setiap sisi G adalah bilangan positif. Contohnya dalam kehidupan sehari-hari adalah
 - a. Misalkan titik di graph tersebut mewakili kota, sisi mewakili jalan langsung yang menghubungkan dua kota, dan bobot sisi menyatakan panjang jalan yang diwakili oleh sisi tersebut. Misalkan kita berada di kota yang diwakili oleh titik v_1 dan ingin bepergian dengan mobil ke kota yang diwakili oleh titik v_{11} . Ada beberapa lintasan yang bisa kita tempuh sedemikian hingga jarak di tempat minimum.
 - b. Pengambilan sampah pada suatu perumahan. Dengan menggunakan algoritma dijkstra kita mendapatkan jarak minimum yang ditempuh oleh orang yang mengambil sampah.
2. Langkah-langkah Algoritma Dijkstra

Input : Graph bobot G dengan $s, t \in V(G)$

Langkah 1 : Label titik dengan $\lambda(s)=0$ dan untuk setiap titik di G selain s , label titik v dengan $\lambda(v)=\infty$. (dalam praktek ∞ diganti dengan bilangan yang "sangat besar").

Langkah 2 : Misalkan $u \in T$ dengan $\lambda(u)$ minimum.

Langkah 3 : Jika $u=t$, STOP, dan beri pesan: " Panjang lintasan terpendek dari s ke t adalah $\lambda(t)$ ".

langkah 4 : Untuk setiap sisi $e=uv$, $v \in T$; ganti label v dengan $\lambda(v) = \text{minimum}\{\lambda(v), \lambda(u)+w(e)\}$.

langkah 5 : Tulis $T = T - \{u\}$, dan kembali ke Step 2

BAB VI

GRAPH EULER DAN PERMASALAHAN TUKANG POS

A. GAMBARAN SINGKAT MENGENAI MATERI KULIAH

Materi kuliah ini membahas tentang pengertian graph Euler dan semi Euler, karakteristik grap Euler dan semi Euler, Algoritma Fleury, permasalahan tukang pos.

B. PEDOMAN MEMPELAJARI MATERI

Baca dengan baik uraian mengenai pengertian graph Euler dan semi Euler, karakteristik grap Euler dan semi Euler, Algoritma Fleury, permasalahan tukang pos. Kemudian membuat contoh dalam kehidupan sehari-hari graph Euler dan semi Euler dengan menggunakan Algoritma Fleury.

C. TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian graph Euler
2. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian graph semi Euler
3. Mahasiswa dapat memberikan contoh graph Euler
4. Mahasiswa dapat memberikan contoh graph semi Euler
5. Mahasiswa dapat mengetahui karakteristik grap Euler dan semi Euler.
6. Mahasiswa dapat menjelaskan Algoritma Fleury
7. Mahasiswa dapat menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari dengan menggunakan Algoritma Fleury

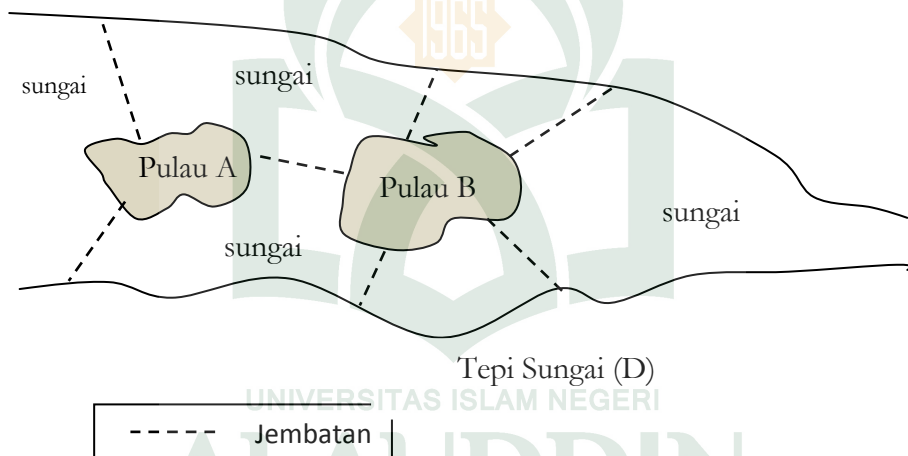
D. KEGIATAN BELAJAR

Kegiatan Belajar 1

a. Materi Perkuliahan 6.1

Pendahuluan

Menurut sejarah, Teory Graph muncul dari permasalahan jembatan Koningsberg'. Pada prinsipnya permasalahan tersebut dapat diuraikan seperti berikut. Koningsberg adalah kota kecil yang terletak di benua Eropa. Di kota tersebut ada sungai besar dan di dalamnya terdapat dua delta (pulau kecil). Delta-delta tersebut dan tepi-tepi sungai dihubungkan oleh beberapa jembatan, seperti tampak pada gambar berikut.

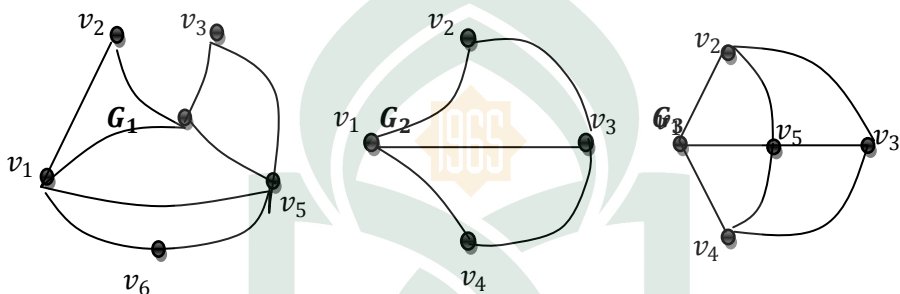


Gambar 6.1.1: Jembatan Koningsberg

Seseorang ingin menelusuri semua jembatan yang ada sedemikian hingga setiap jembatan dilewati tepat satu kali. Bisakah hal tersebut dilakukan ? setelah coba-coba tentu saja hal tersebut tidak mungkin dilakukan oleh orang tersebut. Tahukah saudara alasannya? Jawaban masalah tersebut dengan mudah dipahami setelah pembahasan berikut.

Pengertian Graph Euler dan Semi Euler

Sebuah sirkuit di graph G yang memuat semua sisi G disebut sirkuit Euler. Jika Graph G memuat sirkuit Euler, maka graph G disebut graph Euler. Sebuah jejak buka yang memuat sisi graph disebut jejak Euler. Graph G disebut graph semi-Euler jika G memuat jejak Euler. Sebagai contoh, perhatikan gambar 6.1.2, graph G_1 adalah graph Euler karena memuat sirkuit Euler $S = (V_1, V_2, V_4, V_3, V_5, V_4, V_1, V_5, V_6, V_1)$, graph G_2 adalah graph semi-Euler karena memuat jejak Euler buka $J = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_1, V_3)$, sedangkan graph G_3 bukan graph Euler maupun semi-Euler



Gambar 6.1.1: G_1 graph Euler; G_2 graph semi-Euler; G_3 bukan Euler dan bukan semi-Euler.

Karakterisasi Graph Euler dan Semi-Euler

Perhatikan graph G_1 pada gambar 6.1.2, setiap titik G_1 berderajat genap, dan ternyata ini merupakan syarat perlu dan cukup untuk menyimpulkan G_1 graph Euler. Bukti formal tentang hal tersebut dapat dilihat pada teorema berikut.

Teorema 6.1.1:

Misalkan G grup terhubung. Graph G Euler jika dan hanya jika setiap titik G berderajat genap.

Bukti:

Jika G graph Euler maka G memuat sirkuit Euler. Misalkan S sirkuit Euler di G yang berawal dan berakhir di titik v . pandang sebuah titik sembarang di G , sebut saja titik x . karena G terhubung maka titik x

termuat di S . jika $x \neq v$, maka x adalah titik internal S . dalam menelusuri S , setiap kali melewati suatu titik x , digunakan dua sisi S yang terkait di x , yaitu satu sisi saat menuju x dan satu sisi lain saat meninggalkan x . jika dalam menelusuri sisi S titik x dilewati sebanyak k kali, maka banyaknya sisi S yang terkait di titik x adalah $2k$; dan karena S memuat semua sisi G , maka banyaknya sisi G yang terkait di titik x juga sama dengan $2k$. Jadi derajat titik x di G adalah $2k$ (genap). Jika $x = v$, maka x titik awal sekaligus titik akhir dari S . Dalam menelusuri S , pada saat pertama kali meninggalkan titik x (titik x sebagai titik awal), digunakan satu sisi S ; dan pada saat melewati titik x dan x sebagai titik internal S , digunakan dua sisi S ; dan pada akhirnya saat menuju titik x (titik x sebagai titik akhir S), digunakan satu sisi S . Jika dalam menelusuri semua sisi S , titik x dilewati sebanyak k kali sebagai titik internal, maka banyaknya sisi S yang terkait di titik x adalah $1 + 2k + 1$. Jadi derajat titik x di graph G adalah $1 + 2k + 1 = 2(k+1)$, genap.

Sebaliknya akan dibuktikan dengan induksi kuat pada banyaknya sisi G . Untuk $|E(G)| = 1$, jelas G adalah graph dengan satu titik dan satu gelung di titik itu. Jadi G graph Euler. Asumsi: jika G graph terhubung dan derajat setiap titik G genap serta $|E(G)| \leq k$, maka G graph Euler. Misalkan graph G terhubung dengan $k+1$ sisi. Karena derajat setiap titik G genap, maka $\delta(G) \geq 2$. Sehingga G memuat siklus. Misalkan siklus tersebut C . Hapus semua sisi C dari G , diperoleh graph $H = G - E(C)$. Jelas setiap titik H berderajat genap dan sangat mungkin H tak terhubung. Misalkan H_1, H_2, \dots, H_t adalah komponen-komponen graph H . karena setiap komponen H memenuhi premis asumsi, maka setiap komponen H adalah graph Euler. Misalkan S_i adalah sirkuit Euler di $H_i, \forall i, 1 \leq i \leq t$. Sirkuit Euler di G dapat dikonstruksi sebagai berikut. Berawal dari sebuah titik v di C , telusuri sisi-sisi C sampai ke suatu titik, katakan V_1 , yang termuat di sebuah komponen H , katakan H_1 ; selanjutnya telusuri sirkuit Euler S_1 di H_1 berawal dan berakhir di V_1 ; selanjutnya telusuri sisi C yang belum ditelusuri sampai ke sebuah titik, katakan V_2 , yang termuat di sebuah komponen H yang lain, katakan H_2 ; selanjutnya telusuri sirkuit Euler S_2 di H_2 berawal dan berakhir di V_2 ; selanjutnya telusuri sisi C yang belum ditelusuri sampai ke sebuah titik di komponen H yang lain. Proses ini dilanjutkan sampai telusuri sirkuit Euler di komponen H yang terakhir. Setelah itu telusuri sisi C yang belum

tertelusuri sampai akhirnya ke titik V , jelas sirkuit yang diperoleh memuat semua sisi G . Jadi G graph Euler. Dengan demikian teorema terbukti.

Teorema di atas merupakan karakterisasi graph Euler. Karakterisasi graph semi-Euler diberikan dalam teorema berikut:

Teorema 6.1.2:

Misalkan G graph terhubung. Graph G semi-Euler jika dan hanya jika G memuat tepat dua titik berderajat ganjil. Lebih jauh, jejak Euler di G berawal di sebuah titik berderajat ganjil dan berakhir di sebuah titik berderajat ganjil yang lainnya.

Bukti:

Jika G Graph semi-Euler, maka G memuat jejak-Euler-buka. Misalkan J jejak-Euler-buka di G yang berawal di titik u dan berakhir di titik v . Karena G terhubung maka J memuat semua titik G . Misalkan $x \in V(G)$. Terdapat tiga kemungkinan yaitu $x=u$, $x=v$, atau $x \neq u$ dan $x \neq v$.

Jika $x=u$, maka dalam menelusuri jejak J pertama-tama digunakan satu sisi J yang terkait di x , kemudian setiap kali melewati x dan x sebagai titik internal J digunakan dua sisi J yang terkait di x . Apabila dalam menelusuri J titik x dilewati sebanyak k kali sebagai titik internal, maka banyaknya sisi J yang terkait di titik x adalah $1+2k$. Dengan demikian derajat titik x di G adalah $2k+1$ (ganjil).

Jika $x=v$, maka x sebagai titik akhir jejak J : dalam menelusuri jejak J , setiap kali melewati titik x dan titik x sebagai titik internal J , digunakan dua sisi J yang terkait di titik x . Dan akhirnya digunakan satu sisi J yang terkait di x saat menuju titik x dan x sebagai titik akhir. Jika dalam menelusuri J titik x dilewati sebanyak r kali dan x sebagai titik internal, maka banyaknya sisi J yang terkait di titik x adalah $2r+1$. Dengan demikian derajat titik x di G adalah $2r+1$ (ganjil).

Jika $x \neq u$ dan $x \neq v$, maka x adalah titik internal jejak J . seperti sebelumnya, jika dalam menelusuri semua sisi J titik x dilewati sebanyak m kali, maka banyaknya sisi J yang terkait di titik x adalah $2m$. Jadi derajat titik x di graph G adalah $2m$ (genap).

Dengan demikian dapat disimpulkan graph G memiliki tepat dua titik berderajat ganjil yaitu titik awal dan titik akhir jejak J .

Selanjutnya akan dibuktikan kebalikannya. Graph G terhubung dan memiliki tepat dua titik berderajat ganjil. Misalkan titik berderajat ganjil tersebut adalah titik u dan titik v . Bentuklah graph H dari G dengan cara menghubungkan titik u dan titik v dengan sebuah sisi baru, sebut sisi e . Jadi $H = G \cup \{e\}$ dengan $e = uv$ dan $e \in E(G)$. Jelas graph H terhubung dan setiap titik H berderajat genap. Berdasarkan teorema 6.2.1, graph tersebut adalah graph Euler. Misalkan S adalah sirkuit Euler di H yang berawal dan berakhir di titik v sedemikian sehingga sisi e merupakan sisi pertama di S . Maka $S - \{e\}$ merupakan jejak Euler buka di G yang berawal di titik u dan berakhir di titik v . akibatnya, G graph semi-Euler. Dengan demikian bukti lengkap.

b. Latihan 6.1

1. Apakah graph komplit K_n graph Euler?
2. Apakah syaratnya agar graph bipartisi komplit $K_{m,n}$ Euler?
3. Mungkinkah graph bipartisi komplit $K_{m,n}$ semi Euler?Jelaskan!
4. a) Jika graph G memuat titik-pemutus, mungkinkah G Euler? Semi- Euler?
b) Jika graph G memuat sisi-pemutus, mungkinkah G Euler? Semi-Euler?
5. Jika graph G Euler, haruskah G terhubung? Jelaskan!
6. Berapakah minimum banyak jembatan yang harus ditambahkan pada permasalahan jembatan Königsberg agar setiap jembatan dapat dilewati tepat satu kali?
7. Jika G graph terhubung dan memiliki tepat $2k$ titik berderajat ganjil dengan $k \geq 1$, tunjukkan bahwa terdapat k jejak-buka di G sedemikian hingga setiap sisi G terletak di tepat satu jejak-jejak tersebut.

c. Rangkuman 6.1

1. Sebuah sirkit di graph G yang memuat semua sisi G disebut sirkit Euler.
2. Jika Graph G memuat sirkit Euler, maka graph G disebut graph Euler.
3. Sebuah jejak buka yang memuat sisi graph disebut jejak Euler.
4. Graph G disebut graph semi-Euler jika G memuat jejak Euler.
5. Karakteristik grap Euler yaitu G grup terhubung. Graph G Euler jika dan hanya jika setiap titik G berderajat genap.
6. Karakteristik grap semi Euler yaitu G graph terhubung. Graph G semi-Euler jika dan hanya jika G memuat tepat dua titik berderajat ganjil. Lebih jauh, jejak Euler di G berawal di sebuah titik berderajat ganjil dan berakhir di sebuah titik berderajat ganjil yang lainnya.

d. Tes Formatif 6.1

1. Jelaskan pengertian graph Euler!
2. Jelaskan pengertian graph semi Euler!
3. Tuliskan ciri graph Euler?
4. Tuliskan ciri graph semi Euler !

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 6.1

1. Jika Graph G memuat sirkit Euler, maka graph G
2. Graph G disebut graph semi-Euler jika G memuat jejak Euler
3. Karakteristik grap Euler yaitu G grup terhubung. Graph G Euler jika dan hanya jika setiap titik G berderajat genap.
4. jejak Euler di G berawal di sebuah titik berderajat ganjil dan berakhir di sebuah titik berderajat ganjil yang lainnya.

Kegiatan Belajar 2

a. Materi Perkuliahan 6.2

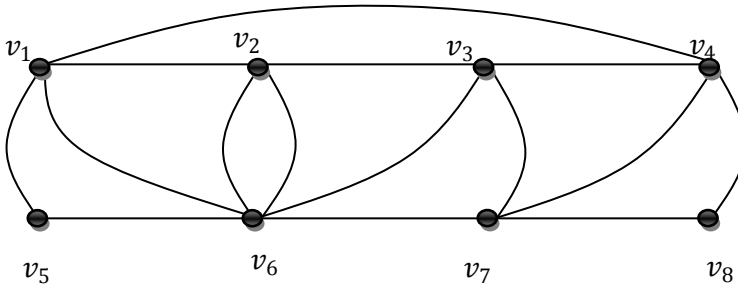
Bagaimanakah caranya mengkontruksi sebuah sirkit (jejak) Euler pada graph Euler (semi-Euler)? Jawabannya, dengan menggunakan algoritma Fleury.

Algoritma Fleury

Algoritma Fleury digunakan untuk mengkontruksi sebuah sirkit Euler pada graph Euler. Berikut disajikan langkah-langkah sistematis dari algoritma tersebut.

- INPUT : Graph Euler G
- STEP 1 : Pilih sebuah titik v_0 di graph G . Tulis $J_0 = v_0$.
- STEP 2 : Misalkan jejak $J_i = (v_0, e_1, v_1, \dots, v_{i-1}, e_i, v_i)$ telah terpilih. Selanjutnya, pilih semua sisi e_{i+1} dari $E(G) - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ sedemikian hingga:
- (i) Sisi e_{i+1} terkait dititik v_i , dan
 - (ii) Sisi e_{i+1} bukan sisi-pemutus pada graph G_i , dengan $G_i = G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$, kecuali tidak ada pilihan lain. Tulis jejak $J_{i+1} = J_i \cup \{e\}$
- STEP 3 : STOP bila STEP 2 tidak bisa dilanjutkan; dan beri pesan: " J_{i+1} adalah jejak Euler tertutup (sirkit Euler) di graph G ".

Berikut diberikan contoh penerapan algoritma Fleury pada graph Euler G yang terdapat pada Gambar 6.1.1. perhatikan bahwa setiap titik G berderajat genap dan G graph terhubung.



Gambar 6.2.1: Graph Euler

STEP 1 : Pilih titik v_1 . Tulis jejak $J_0 = v_1$.

STEP 2 : Jejak J_0 telah terpilih.

Pilih sisi $e_1 = v_1 v_5$. Tulis jejak $J_1 = (v_1, e_1, v_5)$

Pilih sisi $e_2 = v_5 v_6$. Tulis jejak $J_2 = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6)$

Pilih sisi $e_3 = v_6 v_2$. Tulis jejak $J_3 = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2)$

Pilih sisi $e_4 = v_2 v_1$. Tulis jejak $J_4 = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2, e_4, v_1)$

Pilih sisi $e_5 = v_1 v_6$. Tulis jejak $J_5 = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2, e_4, v_1, e_5, v_6)$

Pilih sisi $e_6 = v_6 v_2$.

Tulis jejak $J_6 = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2, e_4, v_1, e_5, v_6, e_6, v_2)$

Pilih sisi $e_7 = v_2 v_3$.

Tulis jejak $J_7 = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2, e_4, v_1, e_5, v_6, e_6, v_2, e_7, v_3)$

Pilih sisi $e_8 = v_3 v_6$.

Tulis jejak $J_8 = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2, e_4, v_1, e_5, v_6, e_6, v_2, e_7, e_8, v_6)$

Pilih sisi $e_9 = v_6 v_7$.

Tulis jejak $J_9 = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2, e_4, v_1, e_5, v_6, e_6, v_2, e_7, v_3, e_8, v_6, e_9, v_7, e_{10}, v_3)$

Pilih sisi $e_{10} = v_7 v_3$.

Tulis jejak $J_{10} = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2, e_4, v_1, e_5, v_6, e_6,$
 $v_2, e_7, v_3, e_8, v_6, e_9, v_7, e_{10}, v_3)$

Pilih sisi $e_{11} = v_3 v_4$.

Tulis jejak $J_{11} = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2, e_4, v_1, e_5, v_6, e_6, v_2, e_7, v_3, e_8,$
 $v_6, e_9, v_7, e_{10}, v_3, e_{11}, v_4, e_{12}, v_8)$

Pilih sisi $e_{12} = v_4 v_8$.

Tulis jejak $J_{12} = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2, e_4, v_1, e_5, v_6, e_6, v_2, e_7,$
 $v_3, e_8, v_6, e_9, v_7, e_{10}, v_3, e_{11}, v_4, e_{12}, v_8)$

Pilih sisi $e_{13} = v_8 v_7$.

Tulis jejak $J_{13} = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2, e_4, v_1, e_5, v_6, e_6, v_2, e_7,$
 $v_3, e_8, v_6, e_9, v_7, e_{10}, v_3, e_{11}, v_4, e_{12}, v_8, e_{13}, v_7)$

Pilih sisi $e_{14} = v_7 v_4$.

Tulis jejak $J_{14} = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2, e_4, v_1, e_5, v_6, e_6, v_2, e_7,$
 $v_3, e_8, v_6, e_9, v_7, e_{10}, v_3, e_{11}, v_4, e_{12}, v_8, e_{13}, v_7, e_{14}, v_4)$

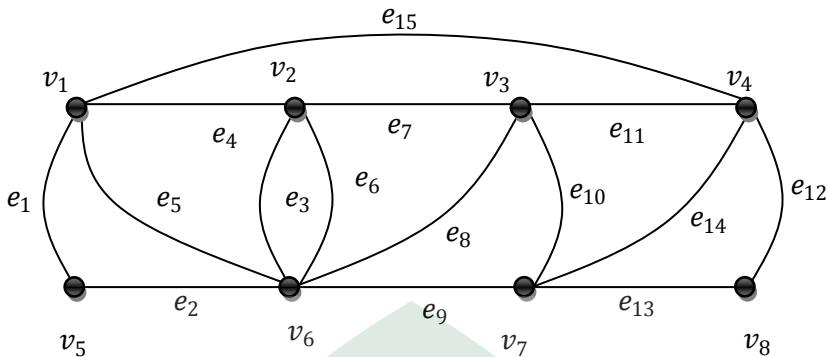
Pilih sisi $e_{15} = v_4 v_1$.

Tulis jejak $J_{15} = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2, e_4, v_1, e_5, v_6, e_6, v_2, e_7, v_3, e_8,$
 $v_6, e_9, v_7, e_{10}, v_3, e_{11}, v_4, e_{12}, v_8, e_{13}, v_7, e_{14}, v_4, e_{15}, v_1)$

STEP 3 : Karena STEP 3 tidak dapat dilanjutkan lagi, maka STOP,
 dan

$J_{15} = (v_1, e_1, v_5, e_2, v_6, e_3, v_2, e_4, v_1, e_5, v_6, e_6, v_2, e_7, v_3, e_8,$
 $v_6, e_9, v_7, e_{10}, v_3, e_{11}, v_4, e_{12}, v_8, e_{13}, v_7, e_{14}, v_4, e_{15}, v_1)$

adalah sirkit Euler J_{15} dapat dilihat pada Gambar berikut.

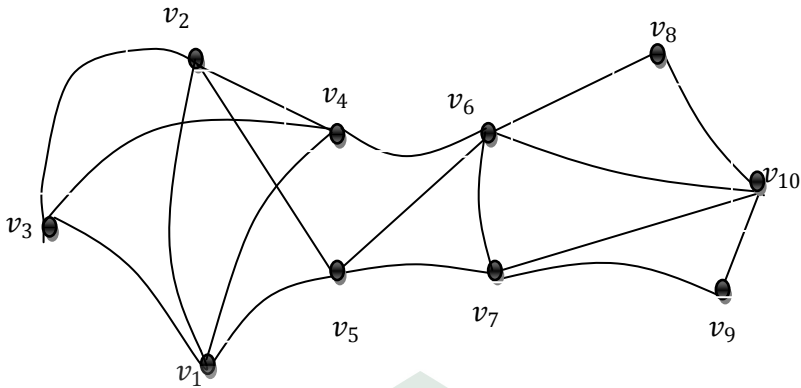


Gambar 6.2.2: sisi-sisi sirkit Euler J_{15} dapat dilihat pada G secara berturut-turut adalah $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}$

Catatan :

Algoritma Fleury dapat dimodifikasi sehingga bisa digunakan untuk mencari jejak Euler-buka pada graph semi-Euler; yaitu dengan mengganti “Grap Euler G ” pada INPUT dengan “Graph semi Euler G ”; STEP 1 diganti menjadi : “Pilih sebuah titik v_0 yang berderajat ganjil di G . Tulis jejak $J_0 = v_0$ ”; pada STEP 3, pesannya menjadi : “ J_{i+1} jejak Euler buka di graph G ”.

Sebagai contoh , perhatikan graph G pada Gambar 6.2.3 berikut. Graph G terhubung dan memiliki tepat dua titik berderajat ganjil, yaitu v_3 dan titik v_6 , titik yang lainnya berderajat genap. Jadi G adalah graph semi Euler.



Gambar 6.2.3: Graph G adalah graph semi euler

Dengan penerapan algoritma Fleury yang termodifikasi, diperoleh:

STEP 1 : Pilih titik v_3 . Tulis jejak $J_0 = v_3$.

STEP 2 : Jejak J_0 telah terpilih.

Pilih sisi $e_1 = v_3v_1$. Tulis jejak $J_1 = (v_3, e_1, v_1)$

Pilih sisi $e_2 = v_1v_2$. Tulis jejak $J_2 = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2)$

Pilih sisi $e_3 = v_2v_3$. Tulis jejak $J_3 = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3)$

Pilih sisi $e_4 = v_3v_4$. Tulis jejak $J_4 = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4)$

Pilih sisi $e_5 = v_4v_2$. Tulis jejak $J_5 = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2)$

Pilih sisi $e_6 = v_2v_5$. Tulis jejak $J_6 = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5)$

Pilih sisi $e_7 = v_5v_1$. Tulis jejak $J_7 = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1)$

Pilih sisi $e_8 = v_1v_4$. Tulis jejak $J_8 = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1, e_8, v_4)$

Pilih sisi $e_9 = v_4v_6$. Tulis jejak $J_9 = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1, e_8, v_4, e_9, v_6)$

Pilih sisi $e_{10} = v_6v_8$. Tulis jejak $J_{10} = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1, e_8, v_4, e_9, v_6, e_{10}, v_8)$

Pilih sisi $e_{11} = v_8v_{10}$. Tulis jejak $J_{11} = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1, e_8, v_4, e_9, v_6, e_{10}, v_8, e_{11}, v_{10})$

Pilih sisi $e_{12} = v_{10}v_9$. Tulis jejak $J_{12} = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1, e_8, v_4, e_9, v_6, e_{10}, v_8, e_{11}, v_{10}, e_{12}, v_9)$

Pilih sisi $e_{13} = v_9v_7$. Tulis jejak $J_{13} = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1, e_8, v_4, e_9, v_6, e_{10}, v_8, e_{11}, v_{10}, e_{12}, v_9, e_{13}, v_7)$

Pilih sisi $e_{14} = v_7v_{10}$. Tulis jejak $J_{14} = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1, e_8, v_4, e_9, v_6, e_{10}, v_8, e_{11}, v_{10}, e_{12}, v_9, e_{13}, v_7, e_{14}, v_{10})$

Pilih sisi $e_{15} = v_{10}v_6$. Tulis jejak $J_{15} = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1, e_8, v_4, e_9, v_6, e_{10}, v_8, e_{11}, v_{10}, e_{12}, v_9, e_{13}, v_7, e_{14}, v_{10}, e_{15}, v_6)$

Pilih sisi $e_{16} = v_6v_7$. Tulis jejak $J_{16} = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1, e_8, v_4, e_9, v_6, e_{10}, v_8, e_{11}, v_{10}, e_{12}, v_9, e_{13}, v_7, e_{14}, v_{10}, e_{15}, v_6, e_{16}, v_7)$

Pilih sisi $e_{17} = v_7v_5$. Tulis jejak $J_{17} = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1, e_8, v_4, e_9, v_6, e_{10}, v_8, e_{11}, v_{10}, e_{12}, v_9, e_{13}, v_7, e_{14}, v_{10}, e_{15}, v_6, e_{16}, v_7, e_{17}, v_5)$

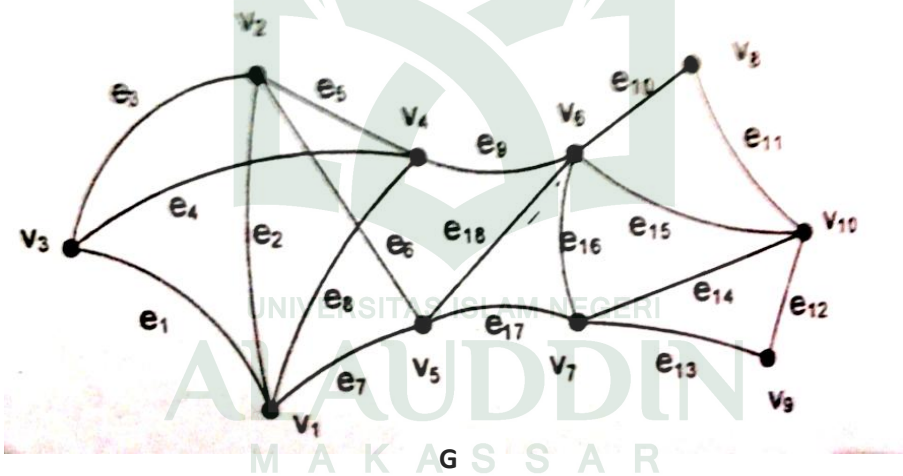
$$e_{13}, v_7, e_{14}, v_{10}, e_{15}, v_6, e_{16}, v_7, e_{17}, v_5)$$

Pilih sisi $e_{18} = v_5 v_6$. Tulis jejak $J_{18} = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1, e_8, v_4, e_9, v_6, e_{10}, v_8, e_{11}, v_{10}, e_{12}, v_9, e_{13}, v_7, e_{14}, v_{10}, e_{15}, v_6, e_{16}, v_7, e_{17}, v_5, e_{18}, v_6)$

STEP 3 : Karena STEP 2 tidak dapat dilanjutkan lagi, maka STOP, dan

Tulis jejak $J_{18} = (v_3, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_2, e_6, v_5, e_7, v_1, e_8, v_4, e_9, v_6, e_{10}, v_8, e_{11}, v_{10}, e_{12}, v_9, e_{13}, v_7, e_{14}, v_{10}, e_{15}, v_6, e_{16}, v_7, e_{17}, v_5, e_{18}, v_6)$ adalah jejak-Euler-buka di graph G.

Label sisi-sisi jejak-Euler-buka J_{17} dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 6.2.4 : Sisi-sisi jejak (V_3, V_6) Euler J_{17} di G secara berturut-turut adalah $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}$

Permasalahan Tukang Pos

Aplikasi teori graph saat ini sangat berkembang di berbagai aspek kehidupan dan semakin rumit. Teori graph awalnya hanya digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah sederhana bahkan menyelesaikan teka-teki. Benarlah firman Allah SWT QS Ali 'Imran ayat 190-191 bahwa tidak ada ciptaan Allah SWT yang sia-sia bagi orang-orang memikirkan ciptaan-Nya. Adalah orang berakal yang memikirkan penciptaan langit dan bumi (segala ciptaan Allah SWT).

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَآخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِّأُولِي
الْأَلْبَابِ ﴿١٩٠﴾

Terjemahnya:

Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal.
(QS. 3:190)

الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ
السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَطْلًا سُبْحَنَكَ فَقِنَا عَذَابَ
النَّارِ ﴿١٩١﴾

Terjemahnya:

Orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia. Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka.
(QS. 3:191).

Hasil sains yang merupakan produk pemikiran, banyak manusia yang semakin tunduk dan patuh kepada Allah SWT. Banyak Ilmuwan menjadi muslim setelah melakukan berbagai penelitian mendapati kebenaran yang telah disebutkan dalam Al Quran. Oleh sebab itu umat Islam harus kembali pada Al Qur'an dan Sunnah agar tidak menysia-nyikan segala ciptaan-Nya selanjutnya dapat menyelesaikan berbagai permasalahan dalam kehidupan. Manusia yang dapat memaksimalkan otak yang dimilikinya akan menemukan cara-cara untuk menyelesaikan masalah kehidupan. Salah satu permasalahan yang dijumpai dalam kehidupan adalah pengantaran surat atau barang. Mengatakan surat juga diabadikan Al Quran dalam kisah nabi Sulaiman. Nabi Sulaiman dikaruniai Mukjizat, salah satunya adalah dapat mengerti bahasa binatang sehingga beliau dapat memerintahkan burung hud-hud mengantarkan surat kepada Balqis, sebagaimana QS. An Naml ayat 28;

أَذْهَبَ بِكِتَابِي هَذَا فَأَلْقَاهُ إِلَيْهِمْ ثُمَّ تَوَلَّى عَنْهُمْ فَانْظُرْ مَاذَا يَرْجِعُونَ

Terjemahnya:

Pergilah dengan (membawa) suratku ini, lalu jatuhkanlah kepada mereka, kemudian berpalinglah dari mereka, lalu perhatikanlah apa yang mereka bicarakan. (QS. 27:27)

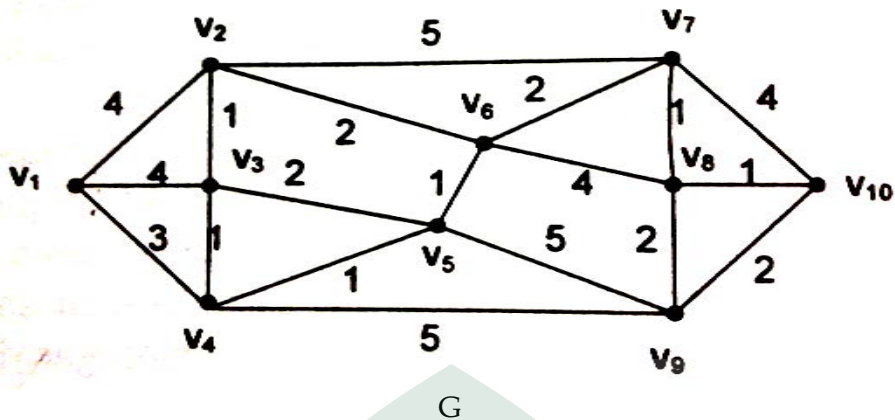
Namun dengan keterbatasan manusia, maka saat ini pengantaran surat barang menjadi masalah. Sehingga matematikawan telah mengembangkan teori graph untuk diaplikasikan di berbagai aspek kehidupan, seperti menyelesaikan permasalahan tukang pos, truk pengangkut sampah dll.

Misalkan seorang Tukang Pos mempunyai tugas rutin mendistribusikan surat dalam suatu wilayah tertentu. Setiap hari dia harus berkeliling menelusuri semua jalan dalam daerah tersebut untuk mendistribusikan surat-surat, berangkat dari kantor pos dan kembali ke kantor pos. Mungkinkah Pak Pos menelusuri setiap jalan tepat satu kali? Kalau mungkin, bagaimanakah caranya? Kalau tidak, jalan-jalan manakah yang harus dilewati lebih dari satu kali agar total jarak yang dia tempuh minimum?

Untuk menjawab permasalahan ini, jaringan jalan di wilayah pendistribusian dapat dimodelkan dengan sebuah graph-bobot. Titik graph berkorespondensi dengan persimpangan jalan, dan sisi graph berkorespondensi dengan jalan yang menghubungkan dua persimpangan. Bobot sisi berkorespondensi dengan panjang jalan yang diwakili oleh sisi tersebut. Dalam hal ini, kantor pos juga dipresentasikan dengan sebuah titik graph.

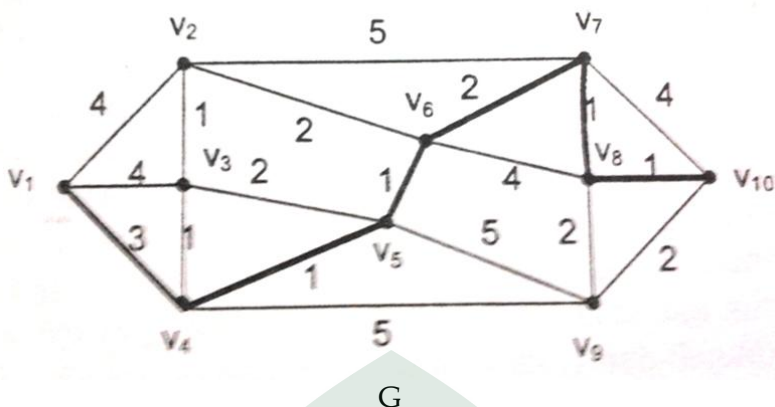
Jika graph model yang diperoleh berupa graph Euler, jelas tukang pos dapat menelusuri semua jalan yang ada sedemikian hingga setiap jalan dilewati tepat satu kali, berawal dan berakhir di kantor pos. Caranya dengan mengikuti cara menelusuri sirkit Euler pada graph model. Yang menjadi persoalan adalah jika graph model yang diperoleh bukan graph Euler. Dengan kata lain, graph model memuat titik berderajat ganjil cukup banyak. Berikut diberikan ilustrasi bila graph model memiliki tepat dua titik berderajat ganjil. Ingat, banyaknya titik berderajat ganjil dalam sebuah graph selalu bernilai genap.

Misalkan graph model G yang diperoleh terhubung dan memiliki tepat dua titik berderajat ganjil. Misalkan titik-titik yang berderajat ganjil tersebut u dan v . Dengan algoritma Dijkstra, dapat dicari sebuah lintasan terpendek P yang menghubungkan titik u dan titik v di graph G . Bentuk graph G' dari G dengan menduplikat semua sisi G sepanjang lintasan P . Jelas graph G' yang diperoleh berupa graph Euler, karena setiap titiknya berderajat genap. Dengan menelusuri sirkit Euler di G' berawal dan berakhir di titik yang berkorespondensi dengan kantor pos, dengan catatan, menelusuri duplikat sisi berarti menelusuri jalan yang berkorespondensi dengan sisi yang diduplikat, akan diperoleh jalan-tutup dengan panjang minimum. Total panjang jalan yang ditempuh sama dengan bobot graph G ditambah panjang lintasan P atau $w(G) + w(P)$.



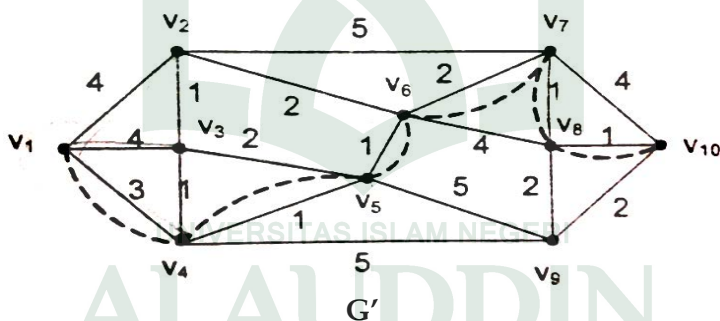
Gambar 6.2.5: Graph bobot G merepresentasika jaringan jalan;
Titik v_5 merepresentasikan kantor pos.

Sebagai contoh, perhatikan graph-bobot G pada Gambar 6.2.5 mempresentasikan suatu jaringan jalan di sekitar kantor pos tertentu. Misalkan titik v_5 merepresentasikan kantor pos. dalam hal ini tukang pos tidak mungkin menelusuri setiap jalan tepat satu kali berawal dan berakhir di kantor pos, karena graph G bukan graph Euler (perhatikan titik v_1 dan titik v_{10} berderajat ganjil). Ini berarti harus ada jalan-jalan yang harus ditelusuri lebih dari satu kali. Untuk menentukan jalan-jalan yang harus ditelusuri lebih dari satu kali agar total jarak yang ditempuh minimum, kita cari lintasan terpendek yang menghubungkan titik v_1 dan titik v_{10} . Dengan menggunakan algoritma Dijkstra, diperoleh lintasan terpendek dari titik v_1 ke titik v_{10} adalah $P = (v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10})$, seperti tampak pada Gambar 6.2.6 berikut.



Gambar 6.2.6: Lintasan- (v_1, v_{10}) terpendek di G adalah $P = (v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10})$

Selanjutnya, dibentuk graph G' dari graph G dengan menduplikat sisi-sisi G sepanjang lintasan P . graph G' yang dimaksud dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 6.2.7: Graph G' dibentuk dari graph G

Perhatikan bahwa setiap titik G' berderajat genap, jadi G' graph Euler. Menggunakan algoritma Fleury, untuk mengkonstruksi sirkuit-Euler yang berawal dan berakhir di titik v_5 pada graph G' ; diperoleh sirkuit-Euler $S = (v_5, v_3, v_4, v_1, v_2, v_3, v_1, v_4, v_9, v_5, v_4, v_5, v_6, v_2, v_7, v_6, v_8, v_7, v_{10}, v_8, v_9, v_{10}, v_8, v_7, v_6, v_5)$. Ingat sirkuit S ini tidak ada di graph G . Jika menelusuri suatu 'sisi-duplikat' di G' adalah menelusuri 'sisi yang diduplikat' di G , maka diperoleh jalan-tutup $J = (v_5, v_3, v_4, v_1, v_2,$

$v_3, v_1, v_4, v_9, v_5, v_4, v_5, v_6, v_2, v_7, v_6, v_8, v_7, v_{10}, v_8, v_9, v_{10}, v_8, v_7, v_6, v_5$) pada graph G yang memuat semua sisi G dengan bobot minimum. Perhatikan dalam menelusuri Jalan J pada graph G , setiap sisi G pada lintasan P ditelusuri tepat dua kali dan setiap sisi G yang lain ditelusuri tepat satu kali. Misalnya, sisi v_1v_4 pada lintasan P dengan bobot 3, dalam menelusuri jalan J , ditelusuri dua kali yaitu: urutan ketiga dari titik v_4 ke titik v_1 dan urutan ketujuh dari v_1 ke v_4 ; sisi v_1v_4 dilabel dengan $3_{3,7}$. Contoh yang lain, sisi v_8v_{10} pada lintasan P dengan bobot 1, dalam menelusuri jalan J , ditelusuri dua kali yaitu: urutan kesembilanbelas dari titik v_{10} ke titik v_8 ; sisi v_8v_{10} dilabel dengan $1_{19,22}$.

Panjang jalan J adalah $w(G) + w(P) = 50 + 9 = 59$. Dengan demikian, strategi yang dapat dipilih oleh tukang pos agar semua jalan dilewati dan total jarak yang ditempuh minimum adalah mengikuti penelusuran jalan J .

b. Latihan 6.2

1. Berapakah minimum banyak jembatan yang harus ditambahkan pada permasalahan jembatan Königsberg agar setiap jembatan dapat dilewati tepat satu kali?
2. Jika G graph terhubung dan memiliki tepat $2k$ titik berderajat ganjil dengan $k \geq 1$, tunjukkan bahwa terdapat k jejak-buka di G sedemikian hingga setiap sisi G terletak di tepat satu jejak-jejak tersebut.

c. Rangkuman 6.2

1. Algoritma Fleury digunakan untuk mengkonstruksi sebuah sirkuit Euler pada graph Euler.
2. Suatu graph dikatakan graph semi Euler jika Graph G terhubung dan memiliki tepat dua titik berderajat ganjil.
3. Suatu graph dikatakan graph Euler jika setiap titik G berderajat genap dan G graph terhubung.

d. Tes Formatif 6.2

1. Kapan suatu graph dikatakan graph semi Euler?
2. Apa tujuan Algoritma Fleury pada suatu graph?
3. Kapan suatu graph dikatakan graph Euler?

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 6.2

1. Suatu graph dikatakan graph semi Euler jika Graph G terhubung dan memiliki tepat dua titik berderajat ganjil.
2. Algoritma Fleury bertujuan untuk mengkontruksi sebuah sirkit Euler pada graph Euler.
3. Suatu graph dikatakan graph Euler jika setiap titik G berderajat genap dan G graph terhubung.



BAB VII

GRAPH HAMILTON DAN PERMASALAHAN TOUR OPTIMAL

A. GAMBARAN SINGKAT MENGENAI MATERI KULIAH

Materi kuliah ini membahas mengenai pengertian graph hamilton, syarat cukup graph hamilton, permasalahan Tour Optimal.

B. PEDOMAN MEMPELAJARI MATERI

Memahami pengertian graph hamilton, syarat cukup graph hamilton, permasalahan Tour Optimal. Menerapkan dalam kehidupan sehari-hari.

C. TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat memahami pengertian graph hamilton
2. Mahasiswa dapat mengetahui graph hamilton dan bukan graph hamilton.
3. Mahasiswa dapat pengertian graph maksimal-non hamilton.
4. Mahasiswa dapat mengetahui graph maksimal-non hamilton dan yang bukan graph maksimal-non hamilton
5. Mahasiswa dapat memahami syarat cukup graph hamilton
6. Mahasiswa dapat memahami algoritma penyisipan titik
7. Mahasiswa dapat menerapkan dalam kehidupan sehari-hari tentang algoritma penyisipan titik
8. Mahasiswa dapat memahami algoritma dua titik optimal
9. Mahasiswa dapat menerapkan dalam kehidupan sehari-hari tentang algoritma dua titik optimal

D. KEGIATAN BELAJAR

Kegiatan Belajar I

a. Materi Perkuliahan 7.1

Pendahuluan

Aplikasi teori graph sangat beraneka ragam dan masih akan berkembang sesuai kebutuhan menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Sehingga umat Islam seharusnya berperan dalam sains dan ilmu pengetahuan. Karena sesungguhnya Al Quran adalah petunjuk bagi manusia dalam menjalani kehidupan, artinya sumber inspirasi sains adalah Al Quran. Sebagaimana QS. Ali Imran ayat 138,



Terjemahnya:

(Al Qur'an) ini adalah penerangan bagi seluruh manusia, dan petunjuk serta pelajaran bagi orang-orang yang bertakwa.

Para mahasiswa yang akan menggeluti matematika diskrit tidak perlu risau dengan kesulitan dan hambatan yang akan dialami. Karena Al Qur'an telah mengabarkan kepada kita bahwa seluruh ciptaan Allah tunduk kepada kehendak Allah, sebagaimana QS. Ar Ruum ayat 26,



Terjemahnya:

Dan kepunyaan-Nyalah siapa saja yang ada di langit dan di bumi. Semuanya hanya kepada-Nya tunduk. (QS. 30:26).

Tanpa ilmu pengetahuan dari Al Quran kita tidak akan mampu mengolah sumber daya yang kita miliki, dengan ilmu pengetahuan Al Qur'an derajat manusia diangkat Allah SWT, sebagaimana QS. Al Mujaadilah ayat 11,

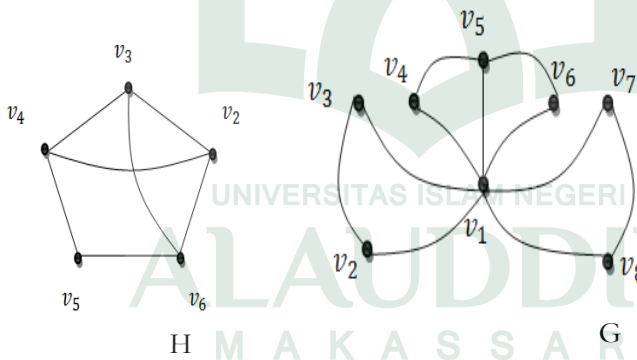
يَتَأْتِيهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَافْسَحُوا
يَفْسَحِ اللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ انشُرُوا فَانْشُرُوا يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ ءَامَنُوا مِنْكُمْ
وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ ۚ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿٥٨﴾

Terjemahnya:

Hai orang-orang yang beriman, apabila dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majelis", maka lapangkanlah, niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu, maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan. (QS. 58:11)

Pengertian Graph Hamilton

Misalkan G sebuah graph, sebuah siklus di G yang memuat semua titik di G disebut siklus hamilton. Jika G memuat siklus hamilton maka G disebut graph hamilton.

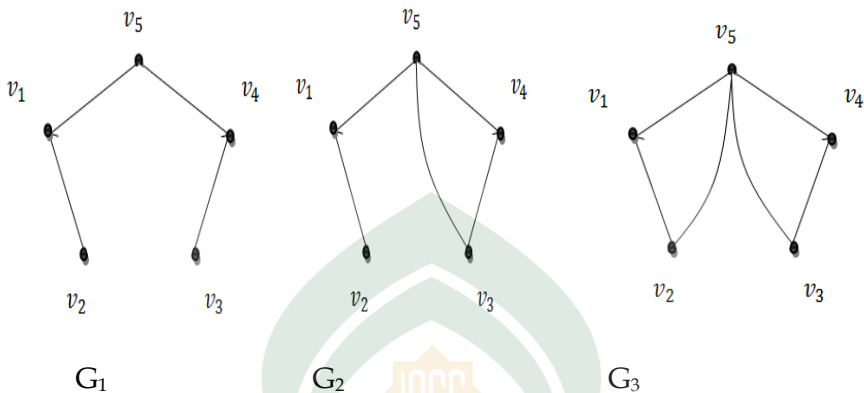


Gambar 7.1.1 : graph h adalah graph hamilton & G bukan graph hamilton

Perhatikan graph H pada Gambar 7.1.1 Siklus $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$ adalah sebuah siklus hamilton di h , begitu juga siklus $(v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_1)$ adalah siklus hamilton di H . Jadi H adalah graph hamilton.

Kiranya jelas bahwa setiap graph komplit dengan n titik, dengan $n \geq 3$, merupakan graph hamilton.

Graph sederhana G disebut graph maksimal non hamilton jika G non hamilton dan penambahan sebuah sisi sebarang yang menghubungkan dua titik yang tidak berhubungan langsung di G menghasilkan graph baru yang hamilton.



Gambar 7.1.2 : G_1 dan G_2 adalah bukan graph maksimal-non-hamilton G_3 adalah graph maksimal-non-hamilton

Perhatikan graph G_1 , G_2 dan G_3 pada Gambar 7.2, ketiga graph tersebut adalah graph non hamilton. Tetapi G_1 bukan graph maksimal-non-hamilton, karena penambahan sisi baru pada G_1 yang menghubungkan titik v_3 dan v_5 , akan menghasilkan graph non-hamilton G_2 . Begitu juga graph G_2 bukan graph maksimal-non-hamilton, karena penambahan sebuah sisi baru pada G_2 yang menghubungkan v_2 dan titik v_5 akan menghasilkan graph non hamilton G_3 . Sekarang penambahan sebuah sisi sebarang pada G_3 yang akan menghubungkan dua titik yang tidak berhubungan langsung, pasti akan menghasilkan graph baru yang hamilton. Jadi graph G_3 adalah graph maksimal-non-hamilton.

Misalkan G sebuah graph. Sebuah lintasan di G yang memuat semua titik di G disebut lintasan hamilton. Graph non hamilton yang memuat lintasan hamilton disebut graph semi hamilton.

Perhatikan bahwa, jika graph G memuat sikel hamilton, maka G pasti memuat lintasan hamilton. Tetapi sebaliknya tidak berlaku, artinya jika G memuat lintasan hamilton belum tentu G memuat sikel

hamilton. Misalnya graph G_1 pada gambar 7.2, memuat lintasan hamilton $P = (v_2, v_1, v_5, v_4, v_3)$ tetapi G_1 tidak memuat siklus hamilton. Jadi G_1 adalah graph semi-hamilton. Begitu juga G_2 dan G_3 adalah graph-graph semi-Hamilton.

Syarat Cukup Graph Hamilton

Menentukan syarat perlu dan cukup sebuah graph Hamilton merupakan permasalahan yang sangat sulit. Berikut ini diberikan syarat cukup bagi sebuah graph sederhana merupakan graph Hamilton.

Teorema 7.1.1 :

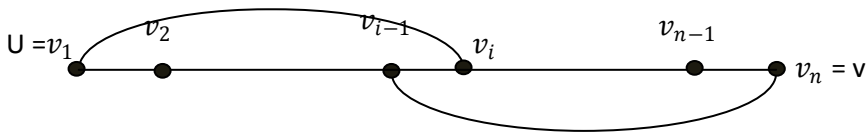
Jika G grph sederhana dengan n titik ($n \geq 3$) dan untuk setiap dua titik u dan v yang tidak berhubungan langsung di G berlaku $d(u) + d(v) \geq n$, maka G graph Hamilton.

Bukti:

Andaikan G bukan graph Hamilton, karena $n \geq 3$ maka G bukan graph komplit K_n . Akibatnya, terdapat dua titik G yang tidak berhubungan langsung. Bentuk graph G_1 dari G dengan menambahkan sebuah sisi yang menghubungkan dua titik yang tidak berhubungan langsung tersebut. Jika G_1 bukan graph Hamilton, maka graph G_1 bukan graph komplit, sehingga ada dua titik yang tidak berhubungan langsung di G_1 . Bentuk graph G_2 dari G_1 dengan menambahkan sebuah sisi yang menghubungkan dua titik yang tidak berhubungan langsung tersebut. Jika G_2 bukan graph komplit, proses penambahan sisi ini bisa dilanjutkan sampai diperoleh graph maksimal-non-Hamilton G_k . Penambahan sisi dengan cara seperti di atas menghasilkan graph sederhana yang baru dengan n titik ($n \geq 3$), dan $d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v) \geq n, \forall u, v \notin E(G_k) \dots \dots \dots (7.1.1)$

Karena G_k Non Hamilton, maka terdapat dua titik di G_k Yang tidak berhubungan langsung sedemikian hingga $d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v) \geq n$, Bentuk graph G^* sedemikian hingga $G^* = G_k + uv$. Maka graph G^* adalah graph Hamilton dan setiap siklus Hamilton di G^* pasti memuat sisi uv . Akibatnya, terdapat lintasan Hamilton di G_k Yang berawal di titik u dan berakhir di titik v . Misalkan lintasan Hamilton tersebut adalah $(u = v_1, v_2, v_3, \dots, v_n = v)$. Jika $uv_i \in E(G_k)$, maka $v_{i-1} \notin E(G_k)$. Karena jika tidak maka di G_k Akan terdapat siklus Hamilton $(u, v_i,$

$v_{i+1}, \dots, v_n, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, u$) di G_k Ini bertentangan dengan G_t Non Hamilton. (lihat Gambar 7.1.3)



Gambar 7.1.3

Sehingga, jika $d_{G_k}(u) = x$, maka $d_{G_k}(v) < n - x$ (karena G_k Sederhana). Dengan demikian,

$$d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v) < x + n - x = n$$

Ini kontradiksi dengan persamaan (7.1.1), dengan demikian Teorema terbukti.

Catatan :

Perhatikanlah bahwa kebalikan (konversi) pernyataan dalam Teorema 7.1.1 tidak benar atau bernilai salah, artinya, jika G graph Hamilton dengan n titik ($n \geq 3$), maka tidak berlaku $d(u) + d(v) \geq n$, untuk setiap dua titik u dan v di G yang tidak berhubungan langsung. Misalkan, siklus dengan 6 titik (C_6) merupakan graph Hamilton, tetapi jumlah derajat setiap dua titik yang tidak berhubungan langsung di siklus tersebut selalu sama dengan $4 < 6$ (banyaknya titik C_6).

Sebagai akibat dari Teorema 7.1.1 adalah Teorema Dirac berikut, yang menyatakan bahwa suatu graph sederhana akan merupakan graph Hamilton jika derajat setiap titiknya melebihi separuh dari banyaknya titik.

Teorema 7.1.2 :

(Teorema Dirac). Jika G graph sederhana dengan n titik, ($n \geq 3$) dan $d(v) \geq \frac{n}{2}$ Untuk setiap $v \in V(G)$, maka G graph Hamilton.

Bukti :

Karena untuk setiap $v \in V(G)$ berlaku $d(v) \geq \frac{n}{2}$, maka untuk setiap dua titik di u dan v yang tidak berhubungan langsung berlaku

$$d(u) + d(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

Berdasarkan Teorema 7.1.1, maka G graph Hamilton. Teorema terbukti.

Catatan :

syarat $d(v) \geq \frac{n}{2}$ Dalam Teorema 7.1.2 tidak bisa diganti menjadi $d(v) \geq \frac{n-1}{2}$, artinya terdapat graph sederhana G dengan $d(v) \geq \frac{n-1}{2}$

Untuk setiap $v \in V(G)$, tetapi G non Hamilton. Sebagai contoh, graph G seperti pada gambar berikut :



Gambar 7.1.4

Perhatikan bahwa $\forall v \in V(G), d(v) \geq \frac{n-1}{2}$ Dengan $n=5$, tetapi G bukan graph Hamilton.

Akibat langsung dari Teorema 7.1.2 adalah Teorema berikut :

Teorema 7.1.3 :

Jika G graph sederhana beraturan- k dengan $2k-1$ titik, maka G graph Hamilton.

Bukti :

Karena G beraturan- k , maka untuk setiap $v \in V(G), d(v)=k \geq \frac{k-1}{2}$. Berdasarkan Teorema 7.2, disimpulkan G graph Hamilton.

Berikut akan ditunjukkan bahwa syarat perlu agar graph bipartisi merupakan graph Hamilton adalah kardinalitas dari masing-masing partisi harus sama.

Teorema 7.1.4 :

Misalkan G graph bipartisi dengan bipartisi (A,B) . Jika G graph Hamilton, maka $|A| = |B|$.

Bukti :

Karena G graph bipartisis, maka setiap siklus di G panjangnya genap. Misalkan $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ siklus Hamilton di G , karena panjang G adalah n , maka n genap. Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan titik $v_1 \in A_1$. Karena $v_1v_2 \in E(C) \subseteq E(G)$ dan G bipartisi, maka $v_2 \in B$. Karena $v_2v_3 \in E(C) \subseteq E(G)$ dan G bipartisi, maka $v_3 \in A$. Karena $v_3v_4 \in E(C) \subseteq E(G)$ dan G bipartisi, maka $v_4 \in B$; dan seterusnya. Karena v_1 di A dan $v_1v_n \in E(C) \subseteq E(G)$ dan G bipartisi, maka $v_n \in B$. Perhatikan bahwa, titik-titik C yang berindeks ganjil terletak di A dan titik-titik C yang berindeks genap terletak di B , sehingga:

$$A = \{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{n-1}\} \text{ dan } B = \{v_2, v_4, v_6, \dots, v_n\}$$

Jelas bahwa $|A| = \frac{n}{2} = |B|$. Teorema terbukti.

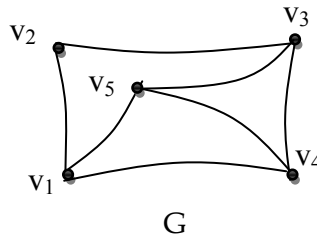
Dengan proses yang sama seperti pembuktian Teorema 7.1.4 di atas, dapat dibuktikan bahwa jika G graph bipartisi dengan bipartisi (A,B) dan G semi Hamilton dan lintasan Hamiltonnya berawal dan berakhir di partisi yang sama, maka $|A| = |B| \pm 1$.

Teorema berikut merupakan sebuah syarat cukup yang lain bagi sebuah graph merupakan graph Hamilton.

Teorema 7.1.5 :

Jika G graph dengan n titik, $n \geq 3$, sedemikian hingga untuk setiap bilangan bulat j dengan $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ Banyaknya titik-titik yang berderajat tidak melebihi j adalah kurang dari j , maka graph G Hamilton.

Sebelum membuktikan Teorema ini, mari kita perhatikan ilustrasi berikut.



Gambar 7.1.5

Perhatikan graph G pada Gambar 7.1.5, dalam hal ini banyaknya titik G adalah $n = 5$ dan $1 \leq j \leq \frac{5}{2}$.

Untuk $j = 1$, banyaknya titik G yang berderajat tidak melebihi 1 adalah 0 dan $0 < j$ untuk $j = 2$, banyaknya titik G yang berderajat tidak melebihi 2 adalah 1 yaitu v_2 dan $1 < j$. Dengan demikian berdasarkan Teorema di atas, G graph Hamilton. Kenyataannya ada siklus Hamilton di G yaitu $(v_1, v_4, v_5, v_3, v_2, v_1)$.

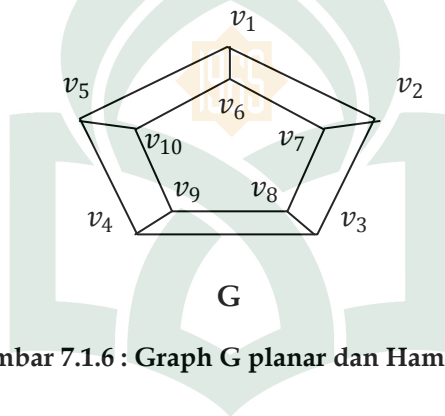
Bukti Teorema 7.1.5 :

Andaikan G tidak Hamilton, dan $n \geq 3$ dan untuk setiap bilangan bulat j dengan $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$, berlaku banyaknya titik yang berderajat tidak melebihi j adalah kurang dari j . Maka ada graph non Hamilton G yang mempunyai sisi maksimum yang memenuhi premis, karena $n \geq 3$ maka G bukan graph komplit. Karena G tidak komplit, maka ada dua titik v_1 dan v_n di G yang tidak berhubungan langsung sedemikian hingga $d(v_1) + d(v_n)$ maksimum. Misalkan $d(v_1) \leq d(v_n)$, karena G non Hamilton dengan sisi maksimum maka graph $G + v_1 v_n$ Hamilton dan setiap siklus Hamilton di graph $G + v_1 v_n$ pasti memuat sisi $v_1 v_n$. Akibatnya, titik-titik v_1 dan v_n merupakan titik akhir dari lintasan Hamilton $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ di G . Jika sebuah titik v_i , $2 \leq i < n$ berhubungan langsung dengan titik v_1 , maka titik v_{i-1} tidak berhubungan langsung dengan titik v_n di G .

Sebab, jika tidak maka terbentuk siklus Hamilton $C = (v_1, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_1)$ di G , kontradiksi. Sehingga $d(v_n) \leq n - 1 - d(v_1)$, akibatnya $d(v_1) \leq d(v_n) \leq n - 1 - d(v_1)$, sehingga $d(v_1) \leq \frac{n-1}{2}$.

Dari pemilihan v_1 dan v_n , maka $d(v_{i-1}) \leq d(v_1)$, untuk semua yang tidak berhubungan langsung dengan v_n . Maka terdapat paling sedikit $d(v_1)$ titik-titik yang mempunyai derajat tidak melebihi $d(v_1)$, karena $1 \leq d(v_1) \leq \frac{n}{2}$ maka dari hipotesis terdapat kurang dari $d(v_1)$ titik-titik yang mempunyai derajat tidak melebihi $d(v_1)$. Kontradiksi.

Perhatikan graph pada Gambar 7.1.6, graph ini merupakan graph planar dan graph Hamilton. sikel $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_{10}, v_9, v_8, v_7, v_6, v_1)$ adalah sikel Hamilton pada graph G . sikel Hamilton ini mempartisi bidang (muka-muka) G menjadi dua jenis yaitu muka-muka (daerah-daerah) yang terletak di eksterior C . ada 4 muka G di interior C , masing-masing muka dibatasi oleh 4 sisi dan terdapat 3 muka di eksterior C . ada 2 muka yang masing-masing dibatasi 5 sisi dan satu daerah yang dibatasi 4 sisi.



Gambar 7.1.6 : Graph G planar dan Hamilton

Misalkan :

r_i = banyak muka di interior C yang dibatasi oleh i sisi
 r'_i = banyak muka di eksterior C yang dibatasi oleh i sisi
 maka dari graph di atas, diperoleh :

$$\begin{aligned} r_3 &= 0, r'_3 = 0 & ; & & r_4 &= 4, r'_4 = 1 \\ r_5 &= 0, r'_5 = 2 & ; & & r_6 &= 0, r'_6 = 0 \\ r_i &= 0, \forall i, 7 \leq i \leq 10; & & & r'_i &= 0, \forall i, 7 \leq i \leq 10 \end{aligned}$$

sehingga

$$\sum_{i=3}^{10} (i-2)(r_i - r'_i) = 1(0-0) + 2(4-1) + 3(0-2) + \dots + 8(0-0) = 0$$

Ternyata ini berlaku untuk setiap graph planar yang Hamilton dan ini dikenal dengan persamaan Grinberg. Berikut kita buktikan, hal ini berlaku secara umum.

Teorema 7.1.6 :

Misalkan G sebuah graph planar n titik dengan siklus Hamilton C . maka terhadap siklus C diperoleh :

$$\sum_{i=3}^{10} (i - 2)(r_i - r_i') = 0$$

Bukti :

Pertama-tama pandang muka-muka G didalam C , jika d menyatakan banyaknya diagonal dari G didalam interior C , maka terdapat $d+1$ muka G yang terletak di interior C .

sehingga

$$\sum_{i=3}^n r_i = d + 1$$

Atau

$$d = \sum_{i=3}^n r_i - 1 \quad \dots\dots\dots (7.1.2)$$

Misalkan banyak sisi-sisi yang membatasi muka didalam C dijumlah untuk semua $d+1$ muka, dilambangkan dengan N . Maka, $N = \sum_{i=3}^n i r_i$ = jumlah dari batas semua daerah yang dibatasi i sisi.

Dalam menghitung nilai N setiap diagonal dihitung dua kali dan setiap sisi C dihitung satu kali, sehingga diperoleh

$$N = \sum_{i=3}^n i r_i = 2d + n \quad \dots\dots\dots (7.1.3)$$

Dari (7.1.2) dan (7.1.3) diperoleh,

$$N = \sum_{i=3}^n i r_i = 2(\sum_{i=3}^n r_i - 1) + n.$$

Setelah disederhanakan didapat,

$$\sum_{i=3}^n (i - 2) r_i = n - 2 \quad \dots\dots\dots (7.1.4)$$

Selanjutnya dipandang muka-muka G diluar C , dengan argument yang sama seperti sebelumnya, diperoleh

$$\sum_{i=3}^n (i - 2) r_i ' = n - 2 \qquad \dots\dots\dots (7.1.5)$$

Dari (7.1.4) dan (7.1.5) diperoleh

$$\sum_{i=3}^n (i - 2) r_i = (i - 2) r_i '$$

Ekuivalen dengan

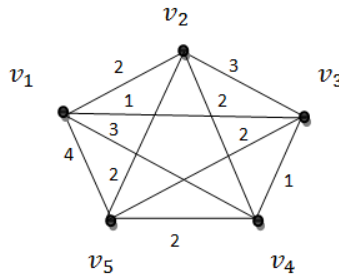
$$\sum_{i=3}^n (i - 2) r_i (i - 2) r_i ' = 0$$

Dengan demikian, teorema terbukti.

Permasalahan Tour Optimal

Seorang “sales” ingin bepergian, berangkat dari suatu kota ke kota yang lain, sedemikian hingga setiap kota dikunjungi tepat satu kali, kecuali kota dimana dia berangkat dan berakhir dikunjungi dua kali. Pertanyaannya adalah, apakah hal itu dapat dilakukan?; dan njika dapat dilakukan bagaimana strategi yang dilakukan agar biaya bepergiannya minimum ? dalam teori graph hal ini ekuivalen dengan yang berikut

Diberikan sebuah graph bobot, apakah ada sikel Hamilton di graph tersebut ? jika ada, cari sikel Hamilton yang mempunyai bobot minimum. Sudah disinggung sebelumnya, kalau diberi sebuah graph untuk menentukan apakah graph tersebut Hamilton atau bukan merupakan permasalahan yang sangat sulit karena sampai saat ini belum ada karakterisasi graph Hamilton. menentukan adnya sikel Hamilton sudah susah apalagi menentukan sikel Hamilton yang minimal. Kita sudah mengetahui bahwa setiap graph komplit dengan n titik ($n \geq 3$) merupakan graph Hamilton. untuk itu kita batasi pada graph bobot yang merupakan graph komplit. Untuk menentukan sikel Hamilton minimal di graph bobot komplit pun masih merupakan permasalahan yang sangat sulit. Sebagai ilustrasi perhatikan graph komplit K_5 berbobot berikut.



G

Gambar 7.1.7: Graph komplit $G = K_5$ berbobot

Terdapat $(5-1)! = 4! = 24$ siklus Hamilton yang berbeda yang berawal dan berakhir di titik v_1 pada graph komplit K_5 . Dan masing-masing siklus Hamilton tersebut mempunyai bobot. Beberapa diantaranya adalah sebagai berikut:

Siklus Hamilton $C_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$ dengan bobot $w(C_1) = 12$

Siklus Hamilton $C_2 = (v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_1)$ dengan bobot $w(C_2) = 12$

Siklus Hamilton $C_3 = (v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_1)$ dengan bobot $w(C_3) = 9$

Siklus Hamilton $C_4 = (v_1, v_2, v_5, v_4, v_3, v_1)$ dengan bobot $w(C_4) = 8$

Siklus Hamilton $C_5 = (v_1, v_4, v_5, v_2, v_3, v_1)$ dengan bobot $w(C_5) = 11$

Siklus Hamilton $C_6 = (v_1, v_3, v_2, v_5, v_4, v_1)$ dengan bobot $w(C_6) = 11$

Adakah siklus Hamilton di graph G yang bobotnya kurang dari $w(C_4) = 8$?

Coba anda daftar semua siklus Hamilton yang lainnya ! kemudian tentukan siklus Hamilton dengan bobot minimum !

Pikirkanlah kalau saudara diminta untuk mendaftarkan semua siklus Hamilton pada graph komplit dengan 50 titik. Mengingat siklus merupakan suatu barisan, maka terdapat sebanyak $50!$ Siklus Hamilton. tentu mendaftarkan sebanyak itu siklus Hamilton memakan waktu yang sangat lama. Adakah suatu cara untuk mendapatkan

sikel Hamilton dengan bobot minimum pada graph komplit berbobot, tanpa harus mendaftar semua sikel Hamilton yang ada?

Sampai saat ini belum ada algoritma untuk mendapatkan sikel Hamilton minimal pada graph bobot komplit. Algoritma yang dibicarakan berikut tidak menjamin diperolehnya sikel Hamilton yang minimal. Kalau titik graph itu cukup banyak tentu cara seperti di atas sangat tidak efisien dan tidak efektif. Untuk itu perlu dikembangkan suatu strategi yang tanpa harus mendaftar keseluruhan dari sikel Hamilton yang ada di G . salah satu cara yang dipakai adalah dengan teknik memilih 'tetangga terdekat' yang dikenal dengan algoritma Serakah (Greedy algorithm) dengan uraian sebagai berikut.

Pertama-tama pilih sebuah titik v di G ; kemudian pilih titik G yang lain, y katakan, yang terdekat dengan titik v ; kemudian pilih titik G yang lain selain y dan v yang terdekat dengan y ; dan seterusnya sampai semua titik terpilih. Sebagai contoh, penerapan strategi ini pada graph bobot G pada Gambar 7.1.7, jika dimulai dari titik v_1 , diperoleh sikel Hamilton $C = (v_1, v_3, v_4, v_5, v_2, v_1)$ dengan bobot $w(C) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8$. Jika dimulai dari titik v_2 mungkin diperoleh sikel Hamilton $C' = (v_2, v_4, v_3, v_1, v_5, v_2)$ dengan bobot $w(C') = 2 + 1 + 1 + 4 + 2 = 10$. Dari sisi, kiranya jelas bahwa teknik tersebut tidak menjamin diperolehnya sikel Hamilton dengan bobot minimum.

Teknik lain yang dapat digunakan adalah teknik penyisipan titik, untuk itu kita sepakati sebuah titik akan dipandang sebagai sikel-1 dan jalan tutup dengan panjang-2 dipandang sebagai sikel-2. Disamping itu digunakan konsep jarak titik v ke sikel atau jalan C , ditulis $d(v,C)$, didefinisikan sebagai berikut :

$$d(v,C) = \min \{d(v,u) \mid u \in V(C)\}$$

sebuah titik v diluar C dikatakan terdekat ke C , jika $d(v,C) \leq d(x,C)$, $\forall x \notin V(C)$.

Algoritma Penyisipan-Titik

INPUT : graph bobot komplit dengan n titik, $n > 3$

STEP 1 : pilih sebuah titik G sebarang untuk membentuk sikel-1 C_1 di G .

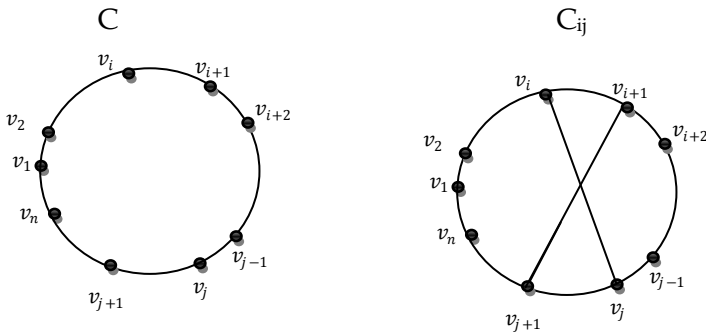
- STEP 2 : jika siklus-k C_k di G telah terbentuk dan $1 \leq n < k$, maka tentukan sebuah titik v_k yang terletak di C_k dan pergi ke STEP 3. Jika $k = n$, maka C_k siklus Hamilton yang dikehendaki dan STOP.
- STEP 3 : Misal C_{k+1} adalah siklus-($k+1$) yang di dapat dengan menyisipkan titik v_k persis sebelum u_k di C_k dan kembali ke STEP 2.

Dengan menerapkan algoritma di atas, pada graph G Gambar 7.1.7, pertama tulis $C_1 = v_1$. Karena v_3 adalah titik yang terdekat ke C_1 , maka diperoleh $C_2 = (v_1, v_3, v_1)$. Selanjutnya, titik 4 adalah titik diluar C_2 yang terdekat ke C_2 dan v_3 adalah titik di C_2 yang terdekat ke v_4 , maka sisipkan titik v_4 sebelum titik v_3 , diperoleh siklus $C_3 = (v_1, v_4, v_3, v_1)$. Berikutnya, titik v_2 adalah salah satu titik terdekat ke titik v_4 di C_3 ; maka sisipkan titik v_2 sebelum titik v_4 , diperoleh siklus $C_4 = (v_1, v_2, v_4, v_3, v_1)$. Terakhir titik v_5 terdekat ke titik v_4 , maka sisipkan titik v_5 sebelum titik v_4 , didapat siklus $C_5 = (v_1, v_5, v_2, v_4, v_3, v_1)$. Jadi C_5 adalah siklus Hamilton (mendekati minimal) pada graph G berbobot 8. Dalam hal ini, faktanya siklus C_5 merupakan sebuah siklus Hamilton minimal di graph G .

Selain menggunakan teknik di atas, untuk mencari sebuah siklus Hamilton dengan bobot 'mendekati' minimal pada graph komplit berbobot G , dapat juga digunakan teknik berikut, yang dikenal dengan 'metode dua-sisi optimal'. Metode ini diawali dengan memilih sebuah siklus Hamilton sebarang, namakan C , pada graph G . setelah melakukan sebarisan modifikasi terhadap C , kita berharap sebuah siklus Hamilton dengan bobot yang lebih kecil dari bobot C . untuk lebih detailnya, misalkan pada awalnya kita memilih siklus Hamilton $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ di graph G . Kemudian, untuk setiap pasangan i, j sedemikian hingga $1 < i+1 < j \leq n$, kita bentuk sebuah siklus Hamilton dari siklus C dengan cara menghapus dua sisi C yaitu sisi-sisi $v_i v_{i+1}$ dan $v_j v_{j+1}$ dan menambahkan dua sisi baru yaitu $v_i v_j$ dan $v_{i+1} v_{j+1}$. Jika siklus Hamilton yang baru dilambangkan dengan C_{ij} , maka:

$$C_{ij} = (v_1, v_2, \dots, v_i, v_j, v_{j-1}, \dots, v_{i+1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_n, v_1).$$

Ilustrasi perubahan siklus Hamilton C menjadi siklus Hamilton C_{ij} dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 7.1.8: Modifikasi C menjadi C_{ij}

Perlu dicatat bahwa pada saat $j = n$, C_{ij} didefinisikan sebagai berikut:

$$C_{ij} = (v_1, v_2, \dots, v_i, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_1).$$

Selanjutnya, jika jumlah bobot dua sisi pengganti lebih kecil dari pada jumlah bobot dua sisi yang digantikan maka bobot siklus Hamilton C_{ij} lebih kecil dari pada jumlah bobot siklus C . dengan kata lain, jika

$$w(v_i v_{i+1}) + w(v_j v_{j+1}) < w(v_i v_j) + w(v_{i+1} v_{j+1}),$$

maka :

$$w(C_{ij}) < w(C)$$

sehingga siklus Hamilton C diganti oleh siklus hamilton C_{ij} . Selanjutnya, dengan cara yang sama modifikasi siklus Hamilton C_{ij} . Proses ini dilanjutkan sampai diperoleh siklus Hamilton yang bobotnya tidak bisa diperkecil lagi. Kita sajikan langkah-langkah algoritma tersebut secara sistematis berikut ini.

Algoritma Dua-Sisi Optimal

INPUT : G graph komplit berbobot dengan n titik

STEP 1 : Misalkan $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ sebuah siklus Hamilton di G dengan bobot $W = w(v_1 v_2) + w(v_2 v_3) + \dots + w(v_n v_1)$.

STEP 2 : Tulis $i = 1$.

STEP 3 : Tulis $j = i + 2$.

STEP 4 : Modifikasi siklus Hamilton C menjadi siklus Hamilton C_{ij} sedemikian hingga $C_{ij} = (v_1, v_2, \dots, v_i, v_j, v_{j-1}, \dots, v_{i+1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_n, v_1)$.

Misalkan W_{ij} adalah bobot siklus Hamilton C_{ij} . Jika $W_{ij} < W$, ganti C dengan C_{ij} dan anti W dengan W_{ij} , label ulang titik-titik C yang baru dengan (v_1, v_2, \dots, v_n) ; dan kembali ke STEP 1.

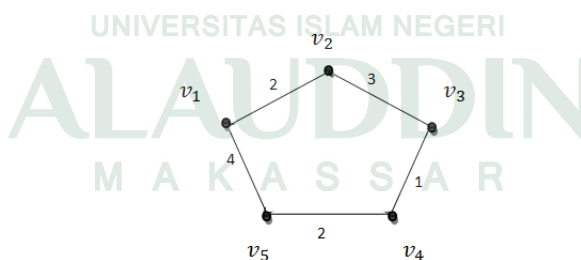
STEP 5 : Tulis $j = j + 1$

Jika $j \leq n$, kerjakan STEP 4; jika tidak tulis $i = i + 1$

Jika $j \leq n-2$, kerjakan STEP 3; jika tidak STOP.

Sebagai contoh penerapan algoritma ini, perhatikan kembali graph G pada Gambar 7.1.7 .

STEP 1. Misalnya, pertama kita pilih siklus Hamilton $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$ dengan bobot $W(C) = W = 2 + 3 + 1 + 2 + 4 = 12$. Untuk mempermudah kita label C sebagai berikut $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1) = (1, 2, 3, 4, 5, 1)$.



Siklus Hamilton C dengan
bobot $w(C) = 12$

STEP 2. $i = 1$

STEP 3. $j = i + 2 = 3$

STEP 4. Konstruksi $C_{13} = (1,3,2,4,5,1) = (v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_1)$; $W_{13} = 1+3+2+2+4 = 12$.
 Karena $W_{13} \geq W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 3 + 1 = 4 \leq 5 = n$

STEP 4. Konstruksi $C_{14} = (1,4,3,2,5,1) = (v_1, v_4, v_3, v_2, v_5, v_1)$; $W_{14} = 3+1+3+2+4 = 13$.

Karena $W_{14} \geq W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 4 + 1 = 5 \leq n$.

STEP 4. Konstruksi $C_{15} = (1, 5, 4, 3, 2, 1) = (v_1, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1)$; $W_{15} = 4+2+1+3+2 = 12$.

Karena $W_{15} \geq W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 5 + 1 = 6 > n$.

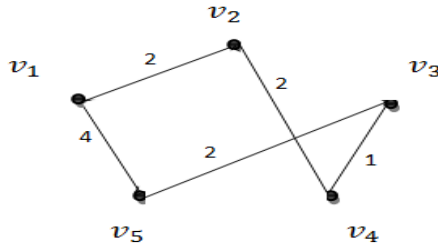
Tulis $i = 1 + 1 = 2$. Karena $i = 2 \leq n - 2$, ke STEP 3.

STEP 3. $j = i + 2 = 2 + 2 = 4$.

STEP 4. Konstruksi $C_{24} = (1, 2, 4, 3, 5, 1) = (v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, v_1)$; $W_{24} = 2+2+1+2+4 = 11$.

Karena $W_{24} < 12 = W$ maka diperoleh C yang baru dengan $C = C_{24} = (v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, v_1)$ dan $W = W_{24} = 11$. Ke STEP 1

STEP 1. Sikel Hamilton yang baru $C = (v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, v_1) = (1, 2, 3, 4, 5, 1)$ dan $W = 11$.



Sikel Hamilton C baru dengan
bobot $w(C) = 11$

STEP 2. $i = 1$

STEP 3. $j = i + 2 = 3$

STEP 4. Konstruksi $C_{13} = (1, 3, 2, 4, 5, 1) = (v_1, v_4, v_2, v_3, v_5, v_1)$; $W_{13} = 3 + 2 + 3 + 2 + 4 = 14$.

Karena $W_{13} = 14 \geq 11 = W$ maka C tetap.

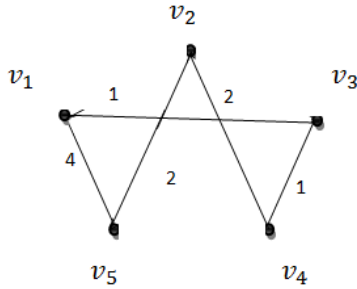
STEP 5. $j = 3 + 1 = 4 \leq 5 = n$

STEP 4. Konstruksi $C_{14} = (1, 4, 3, 2, 5, 1) = (v_1, v_4, v_3, v_2, v_5, v_1)$; $W_{14} = 1 + 1 + 2 + 2 + 4 = 10$.

Karena $W_{14} = 10 < 11 = W$ maka ganti C dengan C_{14} dan W dengan W_{14} .

Sehingga $C = C_{14} = (v_1, v_4, v_3, v_2, v_5, v_1)$ dan $W = W_{14} = 10$. Ke STEP 1.

STEP 1. Sikel Hamilton yang baru $C = (v_1, v_4, v_3, v_2, v_5, v_1) = (1, 2, 3, 4, 5, 1)$ dan $W = 10$.



Sikel Hamilton baru dengan
Bobot $w(C) = 10$

STEP 2. $i = 1$

STEP 3. $j = i + 2 = 3$

STEP 4. Konstruksi $C_{13} = (1, 3, 2, 4, 5, 1) = (v_1, v_4, v_3, v_2, v_5, v_1)$; $W_{13} = 3 + 1 + 3 + 2 + 4 = 13$.

Karena $W_{13} = 13 \geq 10 = W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 3 + 1 = 4 \leq 5 = n$

STEP 4. Konstruksi $C_{14} = (1, 4, 3, 2, 5, 1) = (v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, v_1)$; $W_{14} = 2 + 2 + 1 + 2 + 4 = 11$.

Karena $W_{14} = 11 \geq 10 = W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 4 + 1 = 5 \leq n$.

STEP 4. Konstruksi $C_{15} = (1, 5, 4, 3, 2, 1) = (v_1, v_5, v_2, v_4, v_3, v_1)$; $W_{15} = 4 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$.

Karena $W_{15} \geq W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 5 + 1 = 6 > n$.

Tulis $i = 1 + 1 = 2$. Karena $i = 2 \leq n - 2$, ke STEP 3.

STEP 3. $j = i + 2 = 2 + 2 = 4$.

STEP 4. Konstruksi $C_{24} = (1, 2, 4, 3, 5, 1) = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$;
 $W_{24} = 1+3+2+2+4 = 12$.

Karena $W_{24} = 12 \geq 10 = W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 4 + 1 = 5 \leq n$.

STEP 4. Konstruksi $C_{25} = (1, 2, 5, 4, 3, 1) = (v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1)$;
 $W_{25} = 1+2+2+2+3 = 10$.

Karena $W_{25} = 10 \geq 10 = W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 5 + 1 = 6 > n$.

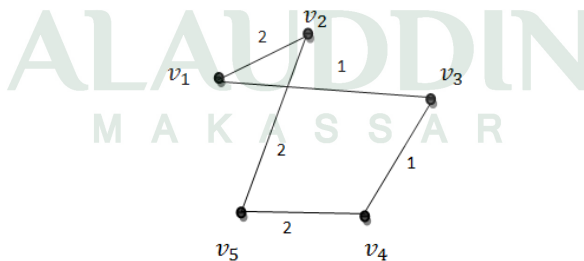
Tulis $i = 1 + 1 = 2$. Karena $i = 2 \leq n - 2$, ke STEP 3.

STEP 3. $j = i + 2 = 3 + 2 = 5$.

STEP 4. Konstruksi $C_{35} = (1, 2, 3, 5, 4, 1) = (v_1, v_3, v_4, v_5, v_2, v_1)$;
 $W_{35} = 1+1+2+2+2 = 8$.

Karena $W_{35} = 8 < 10 = W$ maka diperoleh C yang baru dengan $C = C_{35} = (v_1, v_3, v_4, v_5, v_2, v_1)$ dan $W = W_{35} = 8$. Ke STEP 1

STEP 1. Sikel Hamilton yang baru $C = (v_1, v_3, v_4, v_5, v_2, v_1) = (1, 2, 3, 4, 5, 1)$ dan $W = 8$.



Sikel Hamilton C baru dengan
 Bobot $w(C) = 8$

STEP 2. $i = 1$

STEP 3. $j = i + 2 = 3$

STEP 4. Konstruksi $C_{13} = (1, 3, 2, 4, 5, 1) = (v_1, v_4, v_3, v_5, v_2, v_1)$; $W_{13} = 3+1+2+2+2 = 10$.

Karena $W_{13} \geq W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 3 + 1 = 4 \leq 5 = n$

STEP 4. Konstruksi $C_{14} = (1, 4, 3, 2, 5, 1) = (v_1, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1)$; $W_{14} = 4+2+1+3+2 = 12$.

Karena $W_{14} = 12 \geq 8 = W$ maka C tetap.

STEP 4. Konstruksi $C_{15} = (1, 5, 4, 3, 2, 1) = (v_1, v_2, v_5, v_4, v_3, v_1)$; $W_{15} = 2+2+2+1+1 = 8$.

Karena $W_{15} \geq W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 5 + 1 = 6 > n$.

Tulis $i = 1 + 1 = 2$. Karena $i = 2 \leq n - 2$, ke STEP 3.

STEP 3. $j = i + 2 = 2 + 2 = 4$.

STEP 4. Konstruksi $C_{24} = (1, 2, 4, 3, 5, 1) = (v_1, v_3, v_5, v_4, v_2, v_1)$; $W_{24} = 1+2+2+2+2 = 9$.

Karena $W_{24} = 9 \geq 8 = W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 3 + 1 = 4 \leq 5 = n$

STEP 4. Konstruksi $C_{14} = (1, 4, 3, 2, 5, 1) = (v_1, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1)$; $W_{14} = 4+2+1+3+2 = 12$.

Karena $W_{14} = 12 \geq 8 = W$ maka C tetap.

STEP 4. Konstruksi $C_{15} = (1, 5, 4, 3, 2, 1) = (v_1, v_2, v_5, v_4, v_3, v_1)$; $W_{15} = 2+2+2+1+1 = 8$.

Karena $W_{15} \geq W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 5 + 1 = 6 > n$.

Tulis $i = 1 + 1 = 2$. Karena $i = 2 \leq n - 2$, ke STEP 3.

STEP 3. $j = i + 2 = 2 + 2 = 4$.

STEP 4. Konstruksi $C_{24} = (1, 2, 4, 3, 5, 1) = (v_1, v_3, v_5, v_4, v_2, v_1)$;
 $W_{24} = 1+2+2+2+2 = 9$.

Karena $W_{24} = 9 \geq 8 = W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 4 + 1 = 5 \leq n$.

STEP 4. Konstruksi $C_{25} = (1, 2, 5, 4, 3, 1) = (v_1, v_3, v_2, v_5, v_4, v_1)$;
 $W_{25} = 1+3+2+2+3 = 11$.

Karena $W_{25} \geq W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 5 + 1 = 6 > n$.

Tulis $i = 2 + 1 = 3$. Karena $i = 3 \leq n - 2$, ke STEP 3.

STEP 3. $j = i + 2 = 3 + 2 = 5$.

STEP 4. Konstruksi $C_{35} = (1, 2, 3, 5, 4, 1) = (v_1, v_3, v_4, v_2, v_5, v_1)$;
 $W_{35} = 1+1+2+2+4 = 10$.

Karena $W_{35} > W$ maka C tetap.

STEP 5. $j = 5 + 1 = 6 > n$.

Tulis $i = 3 + 1 = 4$. Karena $i = 4 > n - 2$, maka STOP.

Jadi siklus Hamilton $C = (v_1, v_3, v_4, v_5, v_2, v_1)$ adalah siklus Hamilton 'mendekati' optimal di graph G dengan bobot 8. Kenyataannya, $C = (v_1, v_3, v_4, v_5, v_2, v_1)$ adalah siklus Hamilton optimal pada graph G .

b. Latihan 7.1

1. Jelaskan pengertian graph hamilton!
2. Buktikan Jika G graph sederhana dengan n titik, ($n \geq 3$) dan $d(v) \geq \frac{n}{2}$ Untuk setiap $v \in V(G)$, maka G graph Hamilton.
3. Buktikan G graph bipartisi dengan bipartisi (A,B) . Jika G graph Hamilton, maka $|A| = |B|$.
4. Buktikan bahwa Jika G graph dengan n titik, $n \geq 3$, sedemikian hingga untuk setiap bilangan bulat j dengan $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ Banyaknya titik-titik yang berderajat tidak melebihi j adalah kurang dari j , maka graph G Hamilton.
5. Gambarkanlah graph hamilton dan bukan graph hamilton. Jelaskan mengapa merupakan graph hamilton dan bukan graph hamilton!

c. Rangkuman 7.1

1. G sebuah graph, sebuah sikel di G yang memuat semua titik di G disebut sikel hamilton. Jika G memuat sikel hamilton maka G disebut graph hamilton.
2. Graph sederhana G disebut graph maximal non hamilton jika G non hamilton dan penambahan sebuah sisi sebarang yang menghubungkan dua titik yang tidak berhubungan langsung di G menghasilkan graph baru yang hamilton.
3. Syarat cukup bagi sebuah graph sederhana merupakan graph Hamilton.
4. Jika G grph sederhana dengan n titik ($n \geq 3$) dan untuk setiap dua titik u dan v yang tidak berhubungan langsung di G berlaku $d(u) + d(v) \geq n$, maka G graph Hamilton.
5. Jika G graph sederhana dengan n titik, ($n \geq 3$) dan $d(v) \geq \frac{n}{2}$ Untuk setiap $v \in V(G)$, maka G graph Hamilton.
6. Jika G graph sederhana beraturan- k dengan $2k-1$ titik, maka G graph Hamilton.
7. G graph bipartisi dengan bipartisi (A,B) . Jika G graph Hamilton, maka $|A| = |B|$.
8. Jika G graph dengan n titik, $n \geq 3$, sedemikian hingga untuk setiap bilangan bulat j dengan $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ Banyaknya titik-titik yang

berderajat tidak melebihi j adalah kurang dari j , maka graph G Hamilton.

9. Misalkan G sebuah graph planar n titik dengan siklus Hamilton C . maka terhadap siklus C diperoleh

$$\sum_{i=3}^{10} (i-2)(r_i - r_i') = 0$$

d. Tes Formatif 7.1

1. Jelaskan pengertian graph hamilton!
2. Tuliskan Syarat cukup bagi sebuah graph sederhana merupakan graph Hamilton.
3. Jelaskan graph maximal non Hamilton!

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 7.1

1. Jika G memuat siklus hamilton maka G disebut graph hamilton.
2. Syarat cukup bagi sebuah graph sederhana merupakan graph Hamilton.
 - a. jika G graph sederhana dengan n titik ($n \geq 3$) dan untuk setiap dua titik u dan v yang tidak berhubungan langsung di G berlaku $d(u) + d(v) \geq n$, maka G graph Hamilton.
 - b. Jika G graph sederhana dengan n titik, ($n \geq 3$) dan $d(v) \geq \frac{n}{2}$ Untuk setiap $v \in V(G)$, maka G graph Hamilton.
 - c. Jika G graph sederhana beraturan- k dengan $2k-1$ titik, maka G graph Hamilton.
 - d. G graph bipartisi dengan bipartisi (A,B) . Jika G graph Hamilton, maka $|A| = |B|$.
 - e. Jika G graph dengan n titik, $n \geq 3$, sedemikian hingga untuk setiap bilangan bulat j dengan $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ Banyaknya titik-titik yang berderajat tidak melebihi j adalah kurang dari j , maka graph G Hamilton.
 - f. Misalkan G sebuah graph planar n titik dengan siklus Hamilton C . maka terhadap siklus C diperoleh

$$\sum_{i=3}^{10} (i - 2)(r_i - r_i') = 0$$

3. Graph sederhana G disebut graph maximal non hamilton jika G non hamilton dan penambahan sebuah sisi sebarang yang menghubungkan dua titik yang tidak berhubungan langsung di G menghasilkan graph baru yang hamilton.



BAB VIII

PEWARNAAN PADA GRAPH

A. GAMBARAN SINGKAT MENGENAI MATERI KULIAH

Materi kuliah ini membahas pewarnaan titik maupun pewarnaan sisi pada graph merupakan salah satu topik dalam teori graph yang kaya dengan aplikasi. Pada bab ini akan dibahas secara ringkas tentang konsep pewarnaan pada graph. Bab ini diperkenalkan konsep pewarnaan titik pada graph, kemudian dilanjutkan dengan permasalahan menentukan minimum banyak warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik graph yang selanjutnya disebut bilangan khromatik graph, dan akhirnya disajikan aplikasi pewarnaan titik pada graph. Pewarnanaan sisi pada graph, indeks khromatik, beserta aplikasinya.

B. PEDOMAN MEMPELAJARI MATERI

Memahami pewarnaan titik maupun pewarnaan sisi pada graph, kemudian diperkenalkan konsep pewarnaan titik pada graph, kemudian dilanjutkan dengan permasalahan menentukan minimum banyak warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik graph yang selanjutnya disebut bilangan khromatik graph, dan akhirnya disajikan aplikasi pewarnaan titik pada graph. Pewarnanaan sisi pada graph, indeks khromatik, beserta aplikasinya.

C. TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat mengetahui pewarnaan titik pada graph.
2. Mahasiswa dapat mengetahui bilangan khromatik pada graph.

3. Mahasiswa dapat menjelaskan algoritma pewarnaan barisan sederhana
4. Mahasiswa dapat menjelaskan algoritma pewarnaan barisan besar utama
5. Mahasiswa dapat mengaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari tentang pewarnaan titik pada graph



D. KEGIATAN BELAJAR

Kegiatan Belajar 1

a. Materi Perkuliahan 8.1

Teori graph adalah hasil sains yang merupakan produk manusia untuk menyelesaikan masalah yang dihadapi dalam kehidupan sehari-hari. Sehingga bagi orang yang berpikir dan memanfaatkan segala ciptaan Allah SWT akan memperoleh hasil dari olah pikirnya. Hal inilah yang dilakukan oleh matematikawan yang menemukan teori graph, walaupun mereka tidak beriman kepada Allah SWT. Oleh sebab itu umat Islam seharusnya memperhatikan ciptaan-ciptaan Allah SWT agar lebih mengenal Sang Pencipta, sebagaimana yang dijelaskan pada QS Ali 'Imran ayat 191.

الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ
السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَطْلًا سُبْحَنَكَ فَقِنَا عَذَابَ
النَّارِ

Terjemahnya :

(yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia. Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka. (QS. 3:191).

Maka umat Islam harus memikirkan dan memanfaatkan semua ciptaan Allah SWT karena ciptaan-Nya tidak ada yang sia-sia. Mengetahui alam semesta yang merupakan ciptaan Allah SWT berarti mengenal Islam dan mengetahui bahwa seluruh makhluk tunduk pada kehendak Allah SWT, sebagaimana QS Faathir ayat 28 :

وَمِنَ النَّاسِ وَالْأَنْعَامِ مُخْتَلِفٌ أَلْوَانُهُ كَذَلِكَ إِنَّمَا يَخْشَى اللَّهَ مِنْ عِبَادِهِ الْعُلَمَاءُ إِنَّ اللَّهَ عَزِيزٌ غَفُورٌ

Terjemahnya :

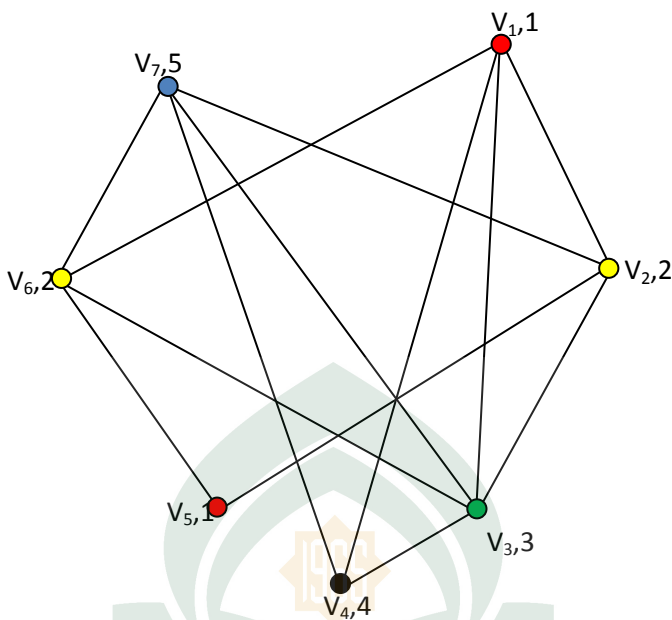
Dan demikian (pula) di antara manusia, binatang-binatang melata dan binatang-binatang ternak ada yang bermacam-macam warnanya (dan jenisnya). Sesungguhnya yang takut kepada Allah di antara hamba-hambaNya, hanyalah ulama. Sesungguhnya Allah Maha perkasa lagi Maha Pengampun. (QS. 35:28).

Warna yang beraneka ragam inilah yang dimanfaatkan oleh matematikawan yang memikirkan ciptaan Allah SWT tersebut. Sehingga warna dijadikan salah satu objek untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Teori pewarnaan graph dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penjadwalan yang rumit.

Pewarnaan Titik pada Graph

Misalkan G sebuah graph, sebuah pewarnaan- k dari G adalah pewarnaan semua titik G dengan menggunakan k warna sedemikian hingga dua titik G yang berhubungan langsung mendapat warna yang berbeda. Jika G memiliki sebuah pewarnaan- k maka G dikatakan dapat diwarnai dengan k warna. Sebuah pewarnaan - k dari graph G biasanya ditunjukkan dengan melabel titik-titik G dengan warna $1, 2, 3, \dots, k$.

Misalnya, sebuah pewarnaan-5 graph G diperlihatkan pada gambar berikut.



Gambar 8.1.1: sebuah pewarnaan-5 dari G .

Karena titik v_1 Dan titik v_2 Berhubungan langsung pada graph G , maka titik v_1 dan titik v_2 Tidak boleh mendapat warna yang sama. Dalam hal ini titik v_1 Diwarnai dengan warna 1 dan titik v_2 Diwarnai dengan warna 2. Sedangkan titik v_1 Dan titik v_5 Boleh mendapat warna yang sama, karena v_1 Dan titik v_5 Tidak berhubungan langsung, sehingga titik v_5 Dapat diwarnai dengan warna 1. Karena titik v_3 Berhubungan langsung dengan titik v_1 Dan titik v_2 Maka warna titik v_3 Harus berbeda dengan warna titik v_1 Dan titik v_2 , jadi titik v_3 Diberi warna yang berbeda dengan warna 1 dan warna 2, misalnya diberi warna 3 dan seterusnya.

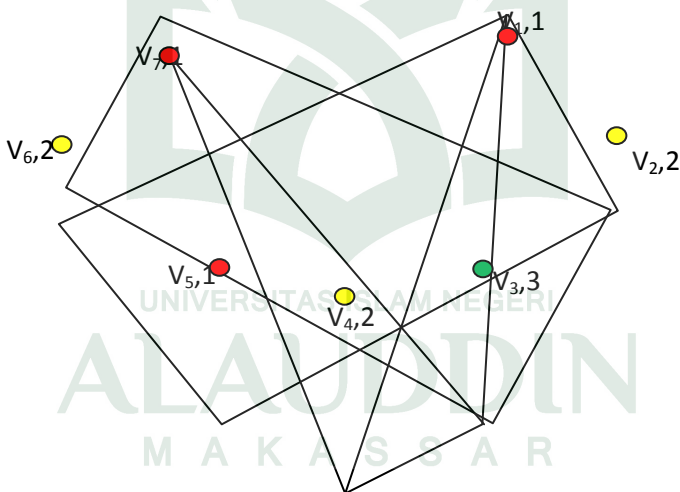
Perhatikan bahwa, jika graph G mempunyai gelung (loop), misalnya pada titik v_1 Maka v berhubungan langsung dengan dirinya sendiri, sehingga tidak ada pewarnaan titik yang memungkinkan untuk graph G . Jika dua titik berbeda di graph G dihubungkan oleh satu sisi atau lebih dari satu sisi, maka kedua titik tersebut tetap harus mendapatkan warna yang berbeda. Sehingga, berkaitan dengan pewarnaan titik pada graph, cukup dibatasi dengan graph-graph sederhana saja.

Bilangan Khromatik pada Graph

Misalkan G sebuah graph. Bilangan kkhromatik (chromatic number) dari graph G , dilambangkan dengan $\chi(G)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\chi(G) = \min \{ k / \text{ada pewarnaan-}k \text{ pada } G \}.$$

Dengan kata lain, bilangan khromatik graph G adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik G , sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna yang berbeda. Jika $\chi(G) = k$ maka ada sebuah pewarnaan- k pada graph G , tetapi sebaliknya tidak berlaku. Misalnya, seperti diperlihatkan pada Gambar 8.1, terdapat sebuah pewarnaan-5 pada graph G , tetapi kurang dari 5 warna, misalnya G dapat diwarnai dengan 3 warna. Seperti terlihat pada Gambar 8.2, jika arena graph G tidak dapat diwarnai dengan menggunakan kurang dari 3 warna, maka bilangan khromatik G adalah 3, atau $\chi(G) = 3$.



Gambar 8.1.2: sebuah pewarnaan-3 dari G .

Teorema berikut merupakan akibat langsung dari definisi bilangan khromatik suatu graph.

Teorema 8.1.1:

- (a). Jika ada sebuah pewarnaan- k pada graph G , maka $\chi(G) \leq k$.
- (b). Jika H sebuah graph bagian dari graph G , maka $\chi(H) \leq \chi(G)$

- (c). Jika G_1, G_2, \dots, G_k adalah komponen-komponen graph G , maka $\chi(G) = \max \{ \chi(G_i) / 1 \leq i \leq k \}$.

Bukti:

- (a) Jika ada sebuah pewarnaan- k pada graph G , maka semua titik G dapat diwarnai dengan menggunakan k warna. Karena bilangan khromatik merupakan minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik graph G sedemikian hingga syarat pewarnaan titik terpenuhi, maka $\chi(G) \leq k$.
- (b) Misal H sebuah graph bagian dari graph G . Berarti $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Karena setiap pewarnaan titik H dapat diperluas ke sebuah pewarnaan titik G , maka $\chi(H) \leq \chi(G)$.
- (c) Misalkan G_1, G_2, \dots, G_k adalah komponen-komponen graph G . Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan G_i untuk setiap i , $1 \leq i \leq k$ adalah komponon graph G yang memiliki bilangan khromatik maksimum, katakan t . Sehingga t warna yang digunakan untuk mewarnai semua titik G_i , dapat digunakan untuk mewarnai semua titik G pada komponen selain G_i , sehingga diperoleh sebuah pewarnaan- t pada G . Berdasarkan definisi, $\chi(G_i) = t$, maka $\chi(G) \geq \chi(G_i) = t$. Akibatnya, $\chi(G) = t$.

Menentukan nilai eksak bilangan khromatik suatu graph secara umum, merupakan masalah yang sangat sulit dalam Teori Graph, namun ada beberapa kelas graph yang dengan mudah dapat ditentukan bilangan khromatiknya, seperti terlihat pada bagian berikut ini.

Bilangan Khromatik Beberapa Kelas Graph

Jika graph G adalah graph kosong, maka $E(G) = \emptyset$. Sehingga semua titik G dapat diwarnai dengan hanya satu warna. Sebaliknya, jika G graph komplit dengan n titik, maka setiap dua titik G berhubungan langsung. Jadi semua titik G harus diwarnai dengan warna yang berbeda. Dengan demikian kita peroleh teorema berikut.

Teorema 8.1.2 :

- (a) Jika graph G adalah graph komplit dengan n titik, maka $\chi(G) = n$.
- (b) Jika graph G adalah graph kosong, maka $\chi(G) = 1$.

Untuk graph bipartisi, diperoleh hasil berikut :

Teorema 8.1.3 :

Misalkan G graph tak kosong. Graph G bipartisi jika dan hanya jika $\chi(G) = 2$.

Bukti:

Misalkan G graph bipartisis dengan partisi X dan Y . Karena setiap dua titik di X tidak berhubungan langsung, maka semua titik X dapat diwarnai dengan menggunakan satu warna, katakanlah warna 1. Begitu juga semua titik Y dapat diwarnai dengan satu warna, katakanlah warna 2. Jadi terdapat sebuah pewarnaan-2 pada G . Berdasarkan definisi, $\chi(G) \leq 2$. Akibatnya $\chi(G) = 2$.

Sebaliknya, misalkan $\chi(G) = 2$. Berarti ada pewarnaan-2 pada graph G . Misalkan X adalah himpunan semua titik G berwarna 1 dan Y adalah himpunan semua titik G yang berwarna 2. Karena semua titik di X warnanya sama, maka tidak ada sisi G yang menghubungkan dua titik X ; begitu juga, tidak ada dua titik Y yang berhubungan langsung. Karena G tak kosong, maka setiap sisi G pasti berhubungan sebuah titik di X dan sebuah titik di Y . Kesimpulannya, graph G adalah graph bipartisi dengan partisi X dan Y .

Misalkan C_n adalah sikel dengan n titik. Maka panjang sikel C_n adalah n . Jika n genap, maka C_n adalah graph bipartisi. Sehingga berdasarkan Teorema 8.3, bilangan khromatik C_n adalah 2. Jika n ganjil, maka C_n bukan graph bipartisi. Sehingga berdasarkan Teorema 8.3 dan C_n bukan graph kosong, maka $\chi(C_n) \geq 3$. Selanjutnya misalkan $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$. Untuk i ganjil dan $1 \leq i \leq n-2$, warnai titik v_i Dengan warna 1 ; untuk i genap dan $1 \leq i \leq n-1$, warnai titik v_i Dengan warna 2; akhirnya warnai titik v_n Dengan warna 3. Maka diperoleh sebuah pewarnaan-3 pada C_n . Berdasarkan definisi bilangan khromatik, maka $\chi(C_n) \leq 3$. Akibatnya, untuk n ganjil, bilangan khromatik C_n adalah 3. Dengan demikian diperoleh teorema berikut.

Teorema 8.1.4:

Jika C_n adalah sikel dengan n titik, maka

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n \text{ genap} \\ 3, & \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Batas Atas Bilangan Khromatik Graph

Di atas telah disebutkan, bahwa untuk menentukan nilai eksak bilangan khromatik sembarang graph merupakan masalah yang sangat sulit. Berikut akan ditunjukkan bahwa bilangan khromatik dari sebuah graph tidak pernah melebihi derajat maksimum graph ditambah satu. Untuk itu diperlukan konsep berikut. Persekitaran (Neighbourhood) titik v pada graph G , dinotasikan dengan N_G atau $N(v)$, didefinisikan sebagai berikut.

$$N_G(v) = \{ u \in V(G) / vu \in E(G) \}.$$

Teorema 8.1.5 :

Jika G sebuah graph sederhana, maka $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Bukti :

(induksi pada $|V(G)| = n$)

Jika $|V(G)| = 1$, maka $G = K_1$, sehingga $\chi(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 0$. Akibatnya, $\chi(G) = 1 \leq 0 + 1 = \Delta(G) + 1$. Jadi pernyataan benar untuk $n = 1$.

Diasumsikan pernyataan benar untuk graph G dengan $|V(G)| = n - 1$, dengan $n > 1$. Misalkan G graph sederhana dengan $|V(G)| = n$. Pandang sebarang titik v di G , hapus titik v di G sehingga terbentuk graph baru $G-v$ dengan $n-1$ titik. Berdasarkan asumsi diperoleh $\chi(G-v) \leq \Delta(G-v) + 1$. Berarti semua titik di graph $G-v$ dapat diwarnai dengan $\Delta(G-v) + 1$ warna. Dengan menghapus titik v dari graph G berakibat $\Delta(G-v) \leq \Delta(G)$. Kita tinjau dua kasus, yaitu $\Delta(G-v) = \Delta(G)$ Dan $\Delta(G-v) < \Delta(G)$.

Kasus 1 :

$$\Delta(G-v) = \Delta(G)$$

Dalam hal ini diperoleh $\chi(G-v) \leq \Delta(G) + 1$. Berarti semua titik di graph $G-v$ dapat diwarnai dengan $\Delta(G) + 1$ warna sedemikian hingga syarat pewarnaan terpenuhi. Karena banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai $N_G(v)$ di $G-v$ sebanyak-banyaknya $\Delta(G)$ Padahal ada pewarnaan $-(\Delta(G) + 1)$ di graph $G-v$, maka terdapat paling sedikit satu warna di $G-v$ yang tidak muncul pada $N_G(v)$ di G , sehingga warna tersebut dapat digunakan untuk mewarnai titik v di G .

Diperoleh pewarnaan- $(\Delta(G) + 1)$ pada graph G . Akibatnya, berdasarkan definisi bilangan khromatik, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kasus 2:

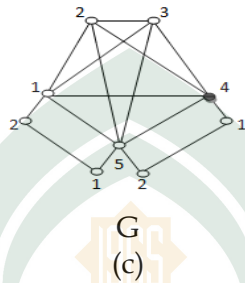
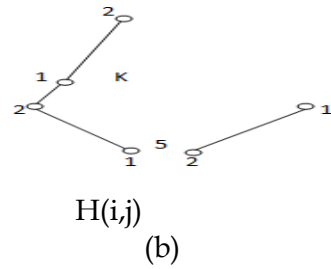
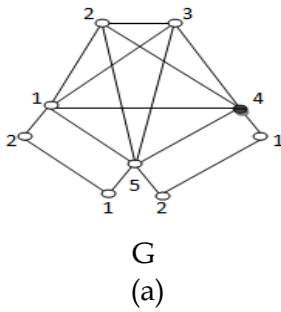
$$\Delta(G) < \Delta(G)$$

Berdasarkan asumsi $\chi(G-v) \leq \Delta(G) + 1$. Karena $\chi(G-v) \leq \Delta(G) + 1$ dan $\Delta(G) < \Delta(G)$ maka $\chi(G-v) < \Delta(G) + 1$ atau $\chi(G-v) \leq \Delta(G)$ (karena bilangan khromatik dari graph $G-v$ adalah bilangan bulat). Ini berarti ada pewarnaan- $\Delta(G)$ pada graph $G-v$. Warnai titik v di G dengan warna (warna baru) selain warna yang muncul di graph $G-v$ sehingga diperoleh pewarnaan- $(\Delta(G) + 1)$ pada graph G . Dengan demikian, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Teorema di atas berlaku untuk sebarang graph sederhana. Jika syarat pada graph G ditambah, misalnya G terhubung, derajat maksimum paling sedikit tiga dan tidak komplit maka kita bisa menurunkan nilai batas itu satu poin. Ini akan dibuktikan pada teorema berikutnya. Dalam pembuktian teorema tersebut kita menggunakan "argument rantai Kempe".

Misalkan G sebuah graph dan titik-titik di G dapat diwarnai dengan paling sedikit dua warna. Misalkan i dan j adalah dua warna yang berbeda di graph G . Misalkan $H(i,j)$ melambangkan graph bagian G yang dibangun semua oleh titik di G yang berwarna i dan j . Sebuah komponen dari $H(i,j)$ disebut rantai Kempe. Jika warna i dan j pada **rantai Kempe** tersebut dipertukarkan tanpa mengubah warna titik-titik lain di graph G , maka diperoleh pewarnaan baru pada G dengan menggunakan jumlah warna yang sama seperti sebelumnya. Teknik pewarnaan ulang ini disebut **argemen rantai Kempe**.

Misalnya sebuah pewarnaan-5 pada graph G dapat dilihat pada Gambar 8.1.3(a). Graph bagian $H(1,2)$ dari G yang dibangun oleh semua titik G yang berwarna 1 dan berwarna 2 dapat dilihat pada Gambar 8.1.3(b). Karena $H(1,2)$ mempunyai dua komponen. Maka pada $H(1,2)$ terdapat dua rantai Kempe yaitu K dan L . Pandang sebuah rantai Kempe di $H(1,2)$, misalnya K . Pertukarka warna 1 dan warna 2 pada rantai Kempe K , sedangkan titik-titik yang lain warnanya tetap maka akan diperoleh pewarnaan-5 yang baru pada graph G seperti yang tampak pada Gambar 8.1.3(c).



Gambar 8.1.3 :

(a) sebuah pewarnaan-5 graph G ; (b) $H(i,j)$ graph bagian G yang dibangun semua titik warna 1 dan warna 2; dengan rantai keempat K dan L ; (c) sebuah pewarnaan-5 yang baru pada graph G .

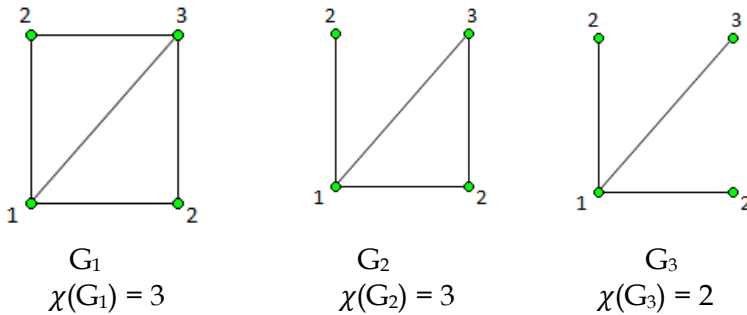
Teorema 8.1.6 :

Misalkan G graph terhubung dengan $\Delta(G) \geq 3$. Jika graph G tidak komplit, maka $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Bukti :

(induksi pada $|V(G)| = n$)

Karena $\Delta(G) \geq 3$ dan G graph sederhana, maka induksi dimulai dari $|V(G)| = 4$. Jika graph G tidak komplit dengan $\Delta(G) \geq 3$ dan $|V(G)| = 4$ maka terdapat tiga kemungkinan G yang tidak isomorfik yaitu $G = G_1$ atau $G = G_2$ atau $G = G_3$, seperti tampak pada gambar berikut.



Gambar 8.1.4 : Tiga buah graph sederhana tak komplit dengan 4 titik dan derajat maksimum minimal 3.

Tampak bahwa, untuk setiap $i \in \{1,2,3\}$, $\chi(G_i) \leq 3 = \Delta(G_i)$. Jadi pernyataan benar untuk $|V(G)| = 4$.

Asumsikan pernyataan benar untuk $|V(G)| = n-1$. Artinya, jika G graph terhubung, tidak komplit, $\Delta(G) \geq 3$, $|V(G)| = n-1$, untuk $n \geq 5$, maka $\chi(G) \leq \Delta(G)$. Akan ditunjukkan pernyataan benar untuk $|V(G)| = n$. Misalkan graph G terhubung dengan n titik, tidak komplit, dan $\Delta(G) \geq 3$. Kita tinjau beberapa kasus.

Kasus 1 :

$$\exists v \in V(G) \ni d(v) < \Delta(G).$$

Hapus titik v di G sehingga terbentuk graph $G-v$ dengan $n-1$ titik. Ditinjau dua subkasus.

Sub kasus 1.1 :

Graph $G-v$ merupakan graph komplit. Maka setiap titik di graph $G-v$ berderajat $\Delta(G-v) = n-2$ dan jelas $\Delta(G) = n-1$. Berdasarkan Teorema 8.5, diperoleh $\chi(G-v) \leq \Delta(G-v) + 1 = n-1 = \Delta(G)$. Ini berarti adap pewarnaan- $\Delta(G)$ Pada vgraph $G-v$. Karena G tidak komplit dan $d(V) < \Delta(G)$, maka terdapat paling sedikit satu warna pada graph $G-v$ yang tidak muncul di $N_G(v)$. Kemudian warnai titik v di G dengan warna yang tidak muncul tersebut sehingga ada sebuah pewarnaan- $\Delta(G)$ Pada geaph G . Akibatnya $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Sub kasus 1.2 :

Graph $G-v$ tidak komplit. Ditinjau dua kasus

Sub kasus 1.2.1 :

$$\Delta(G - v) < 3.$$

Andaikan $\Delta(G - v) = 0$. Karena $\Delta(G) \geq 3$, maka v berhubungan langsung dengan paling sedikit 3 titik. Sehingga v merupakan titik berderajat maksimum di G , bertentangan dengan $d(v) < \Delta(G)$. Untuk $\Delta(G - v) = 1$, juga akan terjadi kontradiksi. Selanjutnya, misalkan $\Delta(G - v) = 2$. Berdasarkan Teorema 8.5, $\chi(G-v) \leq \Delta(G - v) + 1 = 3$. Ini berarti, terdapat pewarnaan-3 pada graph $G-v$. Karena v hanya boleh berhubungan langsung dengan maksimum 2 titik, maka warnai titik v pada graph G dengan warna selain warna-warna di dua titik tersebut. Sehingga diperoleh sebuah pewarnaan-3 pada G . Dengan demikian, $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Sub kasus 1.2.2 :

$\Delta(G - v) \geq 3$. Ditinjau dua kasus, apakah graph $G-v$ terhubung atau tidak terhubung.

Sub kasus 1.2.2.1 :

Graph $G-v$ terhubung.

Karena graph $G-v$ terhubung dengan $\Delta(G - v) \geq 3$ dan tidak komplit, maka berdasarkan asumsi diperoleh $\chi(G-v) \leq \Delta(G - v)$. Berarti ada pewarnaan- $\Delta(G - v)$ Pada graph $G-v$. Dengan menghapus titik v di G , berakibat $\Delta(G - v) \leq \Delta(G)$.

Jika $\Delta(G - v) = \Delta(G)$, maka $\chi(G-v) \leq \Delta(G)$ Berarti ada pewarnaan- $\Delta(G)$ Pada graph $G-v$. Karena $d(v) < \Delta(G)$, maka $|N(v)| < \Delta(G)$ Atau $|N(v)| \leq \Delta(G) - 1$. Maka ada paling sedikit satu warna dari $\Delta(G)$ Warna dalam pewarnaan- $\Delta(G)$ Pada graph $G-v$, yang tidak muncul di $N(v)$, sehingga warna tersebut dapat digunakan untuk mewarnai titik v pada graph G dan diperoleh sebuah pewarnaan- $\Delta(G)$ Pada graph G . Sehingga, $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Sub kasus 1.2.2.2 : Graph G-v tidak terhubung.

Misalkan G_1, G_2, \dots, G_k adalah komponen-komponen graph G-v. Berdasarkan Teorema 8.1, $\chi(G-v) = \max \{ \chi(G_i); 1 \leq i \leq k \}$. Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan komponen G_i mempunyai bilangan khromatik maksimum pada G-v. Jelas bahwa $\Delta(G_i) \leq \Delta(G)$.

Jika $\Delta(G_i) < \Delta(G)$, maka $\chi(G_i) \leq \Delta(G_i) + 1 \leq \Delta(G)$. Pewarnaan $\Delta(G)$ pada G_i dapat diperluas menjadi pewarnaan $\Delta(G)$ pada graph G-v; dan dengan argument yang sama dengan sebelumnya, dapat diperluas menjadi pewarnaan $\Delta(G)$ pada graph G. Sehingga $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Jika $\Delta(G_i) = \Delta(G)$, maka G_i tidak komplit. Karena G_i terhubung, tidak komplit, $\Delta(G_i) = \Delta(G) \geq 3$, dan $|V(G_i)| \leq n - 1$, maka berdasarkan asumsi maka $\chi(G_i) \leq \Delta(G_i) = \Delta(G)$. Ini berarti ada pewarnaan $\Delta(G)$ pada graph G_i . Karena G_i komponen dari graph G-v dengan bilangan khromatik maksimum, maka warna-warna pada G_i dapat digunakan untuk mewarnai titik-titik di komponen lain sehingga ada pewarnaan $\Delta(G)$ pada graph G-v. Karena $d(v) < \Delta(G)$, maka seperti sebelumnya, pewarnaan $\Delta(G)$ pada G-v dapat diperluas menjadi pewarnaan $\Delta(G)$ pada graph G. Sehingga, $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Kasus 2 :

$$\forall v \in V(G), d(v) = \Delta(G) = d.$$

Ini berarti graph G beraturan-d. Akan ditunjukkan ada pewarnaan-d pada graph G. Misalkan v adalah sebuah titik G. Jelas bahwa graph G-v terhubung, tak komplit, dan $\Delta(G-v) = \Delta(G) \geq 3$, sehingga berdasarkan asumsi, $\chi(G-v) \leq \Delta(G) = d$. Berarti ada pewarnaan-d pada graph G-v. Akan ditinjau dua subkasus.

Sub kasus 2.1 :

$$\chi(G-v) < \Delta(G) = d$$

Ini berarti $\chi(G-v) \leq d - 1$, sehingga ada pewarnaan-(d-1) pada graph G-v. Warnai titik v pada graph G dengan warna yang tidak muncul pada G-v, maka diperoleh pewarnaan-d pada G. Sehingga, $\chi(G) \leq d = \Delta(G)$.

Sub kasus 2.2 :

$$\chi(G - v) = \Delta(G) = d$$

Ini berarti ada pewarnaan-d pada graph G-v.

Sub kasus 2.2.1 :

Tidak semua warna pada G-v muncul di $N(v)$. Maka, dalam hal ini, gunakan warna tersebut untuk mewarnai titik v pada G, sehingga diperoleh pewarnaan-d pada graph G. Dengan demikian $\chi(G) \leq d = \Delta(G)$.

Sub kasus 2.2.2 : semua warna pada G-v muncul di $N(v)$.

Sub kasus 2.2.2.1 :

$\exists u, w \in N(v)$ terletak pada komponen $H(i,j)$ yang berbeda. Misalkan titik u berwarna i terletak pada rantai Kempe K dan titik w terletak pada rantai Kempe L pada $H(i,j)$. Terapkan argument rantai Kempe pada rantai K, maka warnai titik u pada pewarnaan yang baru adalah j. Jadi pada pewarnaan baru, warna i tidak muncul pada $N(v)$, sehingga titik v pada graph G dapat diwarnai dengan warna i, dan diperoleh pewarnaan-d pada graph G. Dengan demikian, $\chi(G) \leq d = \Delta(G)$.

Sub kasus 2.2.2.2 :

$\forall u, w \in N(v)$ terletak pada rantai Kempe $H(i,j)$ yang sama.

Selanjutnya, kita tinjau derajat titik u dan titik w pada graph $H(i,j) = H$.

Sub kasus 2.2.2.2.1 :

$$d_H(u) \geq 2 \text{ atau } d_H(w) \geq 2.$$

Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan $d(u) \geq 2$ dan titik u berwarna i. Maka titik u berhubungan langsung dengan paling sedikit dua titik berwarna j pada graph H. Sehingga ada paling sedikit satu warna, namakan warna k, yang tidak muncul di $N(u)$. Gantilah warna titik u dengan warna k, sehingga diperoleh pewarnaan baru pada graph G-v dan warna i tidak lagi muncul di $N(u)$. Selanjutnya warnai titik v di graph G dengan warna i, sehingga diperoleh pewarnaan-d pada graph G. Dengan demikian, $\chi(G) \leq d = \Delta(G)$.

Sub kasus 2.2.2.2.2 :

$$d_h(u) = 1 \text{ atau } d_h(w) = 1.$$

Maka terdapat lintasan- (u,w) P pada graph H .

Sub kasus 2.2.2.2.2.1 :

Terdapat titik internal P berderajat minimum 3 pada H .

Misalkan x adalah titik pertama di internal P dengan $d_h \geq 3$. Misalkan titik x berwarna i , maka terdapat paling sedikit 3 titik di $N_H(x)$ yang berwarna j . Ini berarti terdapat paling sedikit satu warna dari d warna tidak muncul di persekitaran x , misalkan warna tersebut warna k . Gantilah warna titik x dengan warna k . Selanjutnya, perhatikan bagian rantai Kempe dari titik u sampai titik sebelum x . Terapkan argument rantai Kempe pada bagian rantai kempe tersebut, maka diperoleh pewarnaan- d yang baru pada graph $G-v$, sedemikian hingga warna I tidak muncul di $N(v)$. Selanjutnya, warnai titik v dengan warna I , diperoleh pewarnaan- d pada graph G .

Sub kasus 2.2.2.2.2.2 :

Setiap titik internal P berderajat 2 pada H .

Ini berarti H adalah lintasan- (u,w) . Misalkan $H(i,j)$ adalah rantai Kempe yang berupa lintasan dari titik u ke titik w ; dan $K(i,k)$ adalah rantai Kempe berupa lintasan dari titik u ke titik z , dan $z \dots w$.

Misalkan titik u satu-satunya titik sekutu H dan K . Jelas titik u berwarna i . Andaikan u dan w tidak berhubungan langsung di $N(v)$. Misalkan x adalah titik yang berwarna j dan berhubungan langsung dengan u pada rantai H . Dengan menerapkan argument rantai Kempe pada rantai Kempe $K(i,k)$, maka titik u berwarna k dan titik z berwarna i . Karena x berhubungan langsung dengan titik u , maka diperoleh rantai Kempe $H(k,j)$. Kontradiksi dengan definisi rantai Kempe bahwa dalam rantai Kempe hanya terdapat dua warna. Jadi u dan w berhubungan langsung di $N(v)$, akibatnya, G graph komplit. Hal ini kontradiksi dengan hipotesis bahwa graph G tidak komplit. Jadi rantai K dan K memiliki lebih dari satu titik sekutu.

Misalkan x sebuah titik di H dan di K , tetapi $x \neq u$. Berarti titik x berwarna i , mempunyai dua titik tetangga berwarna j dan dua titik tetangga berwarna k . Berarti ada minimal satu warna , namakan

warna l , yang tidak muncul dalam pewarnaan- d pada graph $G-v$. Ganti warna titik x dari warna i menjadi warna l . Perhatikan bagian rantai Kempe mulai dari titik setelah x sampai ke titik z . Terapkan argument rantai Kempe pada bagian rantai Kempe tersebut, maka diperoleh pewarnaan- d yang baru pada graph $G-v$ sedemikian hingga titik z berwarna l di $N(v)$. Sehingga warna k tidak muncul di $N(v)$. Selanjutnya, warnai titik v pada graph G dengan warna k , sehingga diperoleh pewarnaan- d pada graph G . Sehingga, $\chi(G) \leq d = \Delta(G)$. Dengan demikian bukti teorema lengkap.

Algoritma Pewarnaan Titik pada Graph

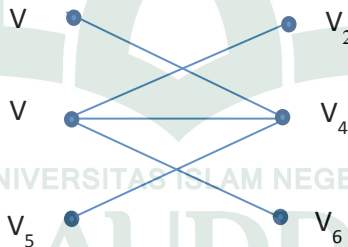
Dalam pewarnaan titik, belum ada algoritma yang efisien untuk memperoleh sebuah pewarnaan titik dengan banyak warna minimum pada sebuah graph. Akibatnya belum ada algoritma yang efisien untuk menentukan bilangan khromatik dari sebuah graph. Beberapa algoritma berikut hanyalah merupakan algoritma pendekatan dan tidak menjamin diperolehnya pewarnaan dengan banyak warna minimum.

Algoritma pewarnaan Barisan-Sederhana (the Simple Sequential Colouring Algorithm)

Algoritma ini dimulai dengan melabel titik v_1 dengan warna 1, selanjutnya warnai titik v_2 dengan warna 1, jika v_2 tidak berhubungan langsung dengan v_1 ; jika v_2 berhubungan langsung dengan v_1 , maka warnai titik v_2 dengan warna 2. Proses dilanjutkan ke titik v_3 . Warnai v_3 dengan warna 1; jika tidak berhubungan langsung dengan v_1 . Jika v_3 berhubungan langsung dengan v_1 dan tidak berhubungan langsung dengan v_2 maka warnai titik v_3 dengan warna 2. Jika v_3 berhubungan langsung dengan v_1 dan v_2 maka warnai v_3 dengan warna 3. Proses ini dilanjutkan terus sampai semua titik graph G mendapat warna. Algoritma Barisan-Sederhana, secara sistematis dapat disajikan sebagai berikut.

- INPUT : Graph G dengan n titik.
- STEP 1 : Label titik G dengan v_1, v_2, \dots, v_n .
Label warna yang ada dengan 1, 2, ..., n.
- STEP 2 : $\forall i = 1, \dots, n$, misal $C_1 = (1, 2, \dots, n)$ daftar warna yang dapat digunakan untuk mewarnai titik v_i .
- STEP 3 : Tulis $i = 1$.
- STEP 4 : Misalkan c_1 warna pertama di c_i , warnailah v_i dengan c_1 .
- STEP 5 : Untuk setiap j dengan $i < j$ dan v_i berhubungan langsung dengan v_j di G tulis $C_j = C_j - \{c_i\}$. (ini berarti, v_j tidak akan mendapat warna yang sama dengan v_i).
- STEP 6 : Catat setiap titik dan warnanya. STOP

Sebagai contoh penerapan algoritma di atas, perhatikan graph G pada gambar berikut.



Gambar 8.1.5

- STEP 1 : Pertama-tama label titik-titik G dengan $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. Seperti tampak pada Gambar 8.1.5. Label warna yang tersedia : 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- STEP 2 : $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{1,2\}$, $C_3 = \{1,2,3\}$, $C_4 = \{1,2,3,4\}$, $C_5 = \{1,2,3,4,5\}$, $C_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- STEP 3 : Tulis $i = 1$
- STEP 4 : 1 adalah warna pertama di C_1 . Warnai titik v_1 dengan warna 1.
- STEP 5 : v_4 berhubungan langsung dengan v_1 , diperoleh $C_4 = \{1,2,3,4\} - \{1\} = \{2,3,4\}$.
 $i = 1+1 = 2$.
- STEP 4 : 1 adalah warna perama di C_2 . Warnai titik v_2 dengan warna 1.
- STEP 5 : v_3 berhubungan langsung dengan v_2 , diperoleh $C_3 = \{1,2,3\} - \{1\} = \{2,3\}$
 $i = 2+1 = 3$.
- STEP 4 : 2 adalah warna perama di C_3 . Warnai titik v_3 dengan warna 2.
- STEP 5 : v_4 dan v_6 berhubungan langsung dengan v_3 , diperoleh $C_4 = \{1,2,3,4\} - \{2\} = \{3,4\}$ dan $C_6 = \{1,2,3,4,5,6\} - \{2\} = \{1,3,4,5,6\}$.
 $i = 3+1 = 4$.
- STEP 5 : v_5 berhubungan langsung dengan v_4 , diperoleh $C_5 = \{1,2,3,4,5\} - \{3\} = \{1,2,4,5\}$. $I = 4+1 = 5$.
- STEP 4 : 1 adalah warna perama di C_5 . Warnai titik v_5 dengan warna 1.
- STEP 5 : Tidak ada titik yang indeks labelnya lebih besar dari 5 yang berhubungan langsung dengan v_6 . $I = 5+1 = 6$.
- STEP 4 : 1 adalah warna pertama di C_6 . Warnai titik v_6 dengan warna 1.
- STEP 5 : $i = 6+1 = 7 > 6 = n$. Lanjut ke STEP 6.
- STEP 6 : Tabel titik-titik G dan warnanya

$V(G)$:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
Warna v_i	:	1	1	2	3	1	1

CATATAN :

Dengan menggunakan algoritma di atas kita hanya memperoleh sebuah pewarnaan-3 pada graph G. Perhatikan bahwa graph G merupakan graph berpartisi, menurut teorema bilangan khromatik G adalah 2.

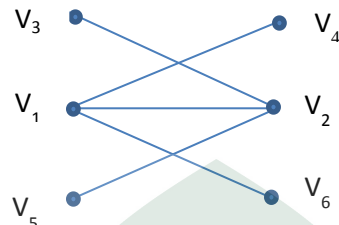
Algoritma Pewarnaan Barisan-Besar-Utama

Urutan dalam pelabelan titik pada graph dapat mempengaruhi banyak warna yang diperlukan mewarnai semua titik G. Algoritma berikut disusun oleh Weish dan Powell, merupakan modifikasi dari Algoritma Barisan-Sederhana. Modifikasi yang dilakukan terletak pada STEP 1, dimana urutan label titik pada graph mengikuti derajat titik pada graph., yaitu mulai dari titik yang berderajat terbesar sampai ke titik berderajat terkecil. Oleh karena itu, algoritma ini dikenal dengan nama Algoritma Barisan Besar – Utama. Berikut disajikan secara lengkap langkah-langkah algoritma tersebut.

- INPUT : Graph G dengan n titik.
- STEP 1 : Label titik-titik graph G dengan v_1, v_2, \dots, v_n sedemikian. Hingga $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$. Label warna- warna yang ada dengan 1, 2, 3, ..., n.
- STEP 2 : $\forall i = 1, \dots, n$, misal $C_i = (1, 2, \dots, n)$ daftar warna yang dapat digunakan untuk mewarnai titik v_i .
- STEP 3 : Tulis $i = 1$.
- STEP 4 : Misalkan c_1 warna pertama di C_i , warnailah v_i dengan c_1 .
- STEP 5 : Untuk setiap j dengan $i < j$ dan v_i berhubungan langsung dengan v_j di G tulis $C_j = C_j - \{c_i\}$. (ini berarti, v_j tidak akan mendapat warna yang sama dengan v_i).
- STEP 6 : Catat setiap titik dan warnanya. STOP

Mari kita terapkan algoritma ini untuk mengkonstruksi sebuah pewarnaan graph G pada gambar 8.5 di atas.

STEP 1 : Label titik-titik G dengan $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. Seperti tampak pada Gambar 8.1.6 berikut.



Gambar 8.1.6 : Pelabelan titik-titik G diurut dimulai maksimum sampai titik berderajat minimum.

STEP 2 : $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{1,2\}$, $C_3 = \{1,2,3\}$, $C_4 = \{1,2,3,4\}$, $C_5 = \{1,2,3,4,5\}$, $C_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$.

STEP : $i = 1$

STEP 4 : 1 adalah warna pertama di C_1 . Warnai titik v_1 dengan warna 1.

STEP 5 : v_2, v_4 , dan v_6 berhubungan langsung dengan v_1 , diperoleh $C_2 = \{1,2\} - \{1\} = \{2\}$; $C_4 = \{1,2,3,4\} - \{1\} = \{2,3,4\}$; $C_6 = \{1,2,3,4,5,6\} - \{1\} = \{2,3,4,5,6\}$. $I = 1+1 = 2$.

STEP 4 : 2 adalah warna perama di C_2 . Warnai titik v_2 dengan warna 2.

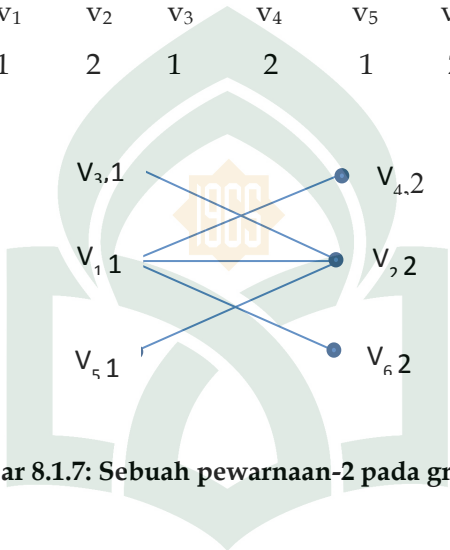
STEP 5 : v_3 dan v_5 berhubungan langsung dengan v_2 , diperoleh $C_3 = \{1,2,3\} - \{2\} = \{1,3\}$ dan $C_5 = \{1,2,3,4,5\} - \{2\} = \{1,3,4,5\}$. $I = 2+1 = 3$.

STEP 4 : 1 adalah warna pertama di C_3 . Warnai titik v_3 dengan warna 1.

STEP 5 : Tidak ada titik yang berindeks lebih dari 3 yang berhubungan langsung dengan v_3 . $I = 3+1 = 4$.

STEP 4 : 2 adalah warna perama di C_4 . Warnai titik v_4 dengan warna 2.

- STEP 5 : Tidak ada titik yang berindeks lebih dari 5 yang berhubungan langsung dengan v_5 . $I = 5+1 = 6$.
- STEP 4 : 2 adalah warna perama di C_6 . Warnai titik v_6 dengan warna 2.
- STEP 5 : Tidak ada titik yang berindeks lebih dari 6 yang berhubungan langsung dengan v_6 , diperoleh $i = 6+1 = 7$. Karena $i > n$, lanjut ke STEP 6.
- STEP 6 : Tabel titik-titik G dan warnanya.
- | | | | | | | | |
|-------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $V(G)$ | : | v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | v_5 | v_6 |
| Warna v_i | : | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |



Gambar 8.1.7: Sebuah pewarnaan-2 pada graph G

Catatan:

Terlihat bahwa pada algoritma ini hanya dua warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik graph G ; lebih sedikit jika dibandingkan dengan menggunakan algoritma sebelumnya.

Aplikasi Pewarnaan Titik pada Graph

Berikut diberikan beberapa aplikasi pewarnaan titik pada graph.

a. Penjadwalan Ujian

Sebuah universitas akan membuat jadwal ujian dengan mata kuliah, dengan syarat jika ada mahasiswa yang memprogram dua mata kuliah yang berbeda maka dua mata kuliah tersebut harus dijadwal pada “slots waktu” yang berbeda, agar mahasiswa

dapat mengikuti ujian kedua mata kuliah tersebut. Permasalahannya adalah bagaimana membuat jadwal ujian agar banyaknya slots waktu yang digunakan minimum. Dalam hal ini kita bentuk sebuah graph dengan cara sebagai berikut: himpunan mata kuliah berkorespondensi satu-satu dengan himpunan titik pada graph. Dua titik pada graph dihubungkan dengan sebuah sisi jika dan hanya jika dua mata kuliah yang berkorespondensi dengan dua titik tersebut secara bersama-sama diprogram oleh seorang mahasiswa. Dikaitkan dengan pewarnaan titik pada suatu graph maka kedua titik yang berhubungan langsung ini harus mendapat warna yang berbeda. Meminimumkan slots waktu yang digunakan, berarti mencari bilangan khromatik dari graph.

b. Penjadwalan Truk Pengangkut sampah

Suatu jadwal perjalanan dari sebuah truk pengangkut sampah adalah suatu jadwal tentang tempat-tempat yang dikunjungi truk sampah tersebut pada suatu hari tertentu. Jika terdapat dua perjalanan mengunjungi tempat yang sama dilakukan oleh sebuah truk, maka kedua perjalanan tersebut harus dilakukan pada hari yang berbeda. Kita ingin menjadwalkan setiap perjalanan dengan satu hari tertentu dalam satu minggu, sedemikian sehingga dua perjalanan mengunjungi tempat yang sama dijadwalkan pada hari yang berbeda. Dalam hal ini kita bentuk sebuah graph G dengan cara sebagai berikut: himpunan perjalanan berkorespondensi satu-satu dengan himpunan titik pada graph. Dua titik pada graph dihubungkan dengan sisi jika dan hanya jika dua perjalanan yang berkorespondensi dengan dua titik tersebut mengunjungi tempat yang sama. Maka warna-warna pada titik-titik graph tersebut merupakan hari. Jika kita ingin menggunakan tidak lebih dari 6 hari dalam seminggu (tidak termasuk minggu) untuk menjadwalkan pengumpulan (pengangkutan) sampah, maka kita menentukan apakah ada pewarnaan-6 pada graph G . Permasalahan ini timbul dari penjadwalan truk sampah di New York City Departement of Sanitation (lihat Roberts).

c. Penentuan Frekuensi Radio Mobile

Kita ingin mengkorespondensikan himpunan frekuensi ke himpunan telephone radio mobile dalam kendaraan. Setiap kendaraan dalam satu wilayah tertentu menerima sejumlah frekuensi yang dipancarkan. Beberapa wilayah terganggu karena berbagai alasan misalnya letaknya yang saling berdekatan atau alasan-alasan meteorologi dan lain-lain. Wilayah yang terganggu harus mendapat frekuensi yang berbeda. Kita bentuk sebuah graph G dengan himpunan wilayah berkorespondensi satu-satu dengan himpunan titik pada graph G . Dua titik pada graph dihubungkan dengan sebuah sisi jika dan hanya jika dua wilayah yang berkorespondensi dengan dua titik tersebut terganggu. Maka warna-warna titik-titik tersebut merupakan frekuensi. Jika kita tertarik dengan menentukan minimum banyak frekuensi yang dibutuhkan, kita harus mencari bilangan khromatik dari graph G .

d. Pembagian Tugas

Tugas yang banyak dapat dibagi menjadi “tugas-tugas kecil”. Beberapa tugas kecil tersebut hanya bisa dikerjakan pada periode waktu yang berbeda, karena pengerjaan tugas-tugas tersebut membutuhkan sumber yang sama seperti peralatan, tempat, pekerja, dan lain-lain. Permasalahannya adalah bagaimana menjadwalkan pelaksanaan tugas-tugas kecil tersebut sedemikian hingga, periode waktu yang diperlukan minimum. Kita bentuk sebuah graph dengan himpunan tugas kecil yang berkorespondensi satu-satu dengan himpunan titik pada graph. Dua titik pada graph dihubungkan dengan sebuah sisi jika dan hanya jika dua tugas kecil yang berkorespondensi dengan dua titik tersebut tidak bisa dikerjakan dalam periode waktu yang sama. Meminimumkan periode waktu yang digunakan berarti mencari bilangan khromatik dari graph yang merepresentasikan permasalahan tersebut.

e. Penempatan Bahan-bahan kimia secara Efisien

Sebuah perusahaan industri berkeinginan menyimpan n jenis bahan kimia yang berbeda. Ada beberapa pasangan bahan kimia yang tidak dapat disimpan pada tempat yang sama, karena dapat

meledak jika saling kontak satu sama lain. Untuk mencegah hal tersebut maka perusahaan tersebut memisahkan bahan-bahan kimia menjadi beberapa bagian untuk ditempatkan di beberapa ruangan dalam sebuah gudang. Beberapa minimum banyaknya ruangan yang diperlukan untuk menyimpan bahan kimia tersebut secara aman?

Kita bentuk sebuah graph G dengan cara sebagai berikut; himpunan titik G yang berkorespondensi satu-satu himpunan n bahan kimia. Dua titik G berhubungan langsung jika dan hanya jika dua bahan kimia yang berkorespondensi dengan dua titik tersebut tidak boleh disimpan pada tempat (ruangan) yang sama. Menentukan minimum banyaknya ruangan, bersesuaian dengan menentukan bilangan khromatik dari graph G .

b. Latihan 8.1

1. Jika graph G memiliki tepat satu siklus dengan panjang ganjil, tunjukkan $\chi'(K_n) = 3$.
2. Jika K_n adalah graph lengkap dengan n titik, buktikan bahwa

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{jika } n \text{ genap} \\ n, & \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$
3. Misalkan G graph beraturan dengan n titik. Jika n ganjil, maka buktikan bahwa G adalah graph kelas dua.

c. Rangkuman 8.1

1. G sebuah graph, sebuah pewarnaan- k dari G adalah pewarnaan semua titik G dengan menggunakan k warna sedemikian hingga dua titik G yang berhubungan langsung mendapat warna yang berbeda.
2. Jika G memiliki sebuah pewarnaan- k maka G dikatakan dapat diwarnai dengan k warna. Sebuah pewarnaan- k dari graph G biasanya ditunjukkan dengan melabel titik-titik G dengan warna $1, 2, 3, \dots, k$.
3. Bilangan khromatik graph G adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik G , sedemikian

hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna yang berbeda

4. Jika ada sebuah pewarnaan- k pada graph G , maka $\chi(G) \leq k$.
5. Jika H sebuah graph bagian dari graph G , maka $\chi(H) \leq \chi(G)$
6. Jika G_1, G_2, \dots, G_k adalah komponen-komponen graph G , maka $\chi(G) = \max \{ \chi(G_i) / 1 \leq i \leq k \}$.
7. Jika graph G adalah graph komplit dengan n titik, maka $\chi(G) = n$.
8. Jika graph G adalah graph kosong, maka $\chi(G) = 1$.
9. G graph tak kosong. Graph G bipartisi jika dan hanya jika $\chi(G) = 2$.
10. Jika G sebuah graph sederhana, maka $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

d. Tes Formatif 8.1

1. Buktikan G graph tak kosong. Graph G bipartisi jika dan hanya jika $\chi(G) = 2$.
2. Buktikan Jika G sebuah graph sederhana, maka $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 8.1

1. **Bukti:** Misalkan G graph bipartisi dengan partisi X dan Y . Karena setiap dua titik di X tidak berhubungan langsung, maka semua titik X dapat diwarnai dengan menggunakan satu warna, katakanlah warna 1. Begitu juga semua titik Y dapat diwarnai dengan satu warna, katakanlah warna 2. Jadi terdapat sebuah pewarnaan-2 pada G . Berdasarkan definisi, $\chi(G) \leq 2$. Akibatnya $\chi(G) = 2$.

Sebaliknya, misalkan $\chi(G) = 2$. Berarti ada pewarnaan-2 pada graph G . Misalkan X adalah himpunan semua titik G berwarna 1 dan Y adalah himpunan semua titik G yang berwarna 2. Karena semua titik di X warnanya sama, maka tidak ada sisi G yang menghubungkan dua titik X ; begitu juga, tidak ada dua titik Y yang berhubungan langsung. Karena G tak kosong, maka setiap sisi G pasti berhubungan sebuah titik di X dan sebuah titik di Y . Kesimpulannya, graph G adalah graph bipartisi dengan partisi X dan Y .

2. **Bukti :** (induksi pada $|V(G)| = n$)

Jika $|V(G)| = 1$, maka $G = K_1$, sehingga $\chi(G) = 1$ dan $\Delta(G)=0$. Akibatnya, $\chi(G) = 1 \leq 0 + 1 = \Delta(G) + 1$. Jadi pernyataan benar untuk $n = 1$.

Diasumsikan pernyataan benar untuk graph G dengan $|V(G)| = n - 1$, dengan $n > 1$. Misalkan G graph sederhana dengan $|V(G)| = n$. Pandang sebarang titik v di G , hapus titik v di G sehingga terbentuk graph baru $G-v$ dengan $n-1$ titik. Berdasarkan asumsi diperoleh $\chi(G-v) \leq \Delta(G-v) + 1$. Berarti semua titik di graph $G-v$ dapat diwarnai dengan $\Delta(G-v) + 1$ warna. Dengan menghapus titik v dari graph G berakibat $\Delta(G-v) \leq \Delta(G)$. Kita tinjau dua kasus, yaitu $\Delta(G-v) = \Delta(G)$ Dan $\Delta(G-v) < \Delta(G)$.

Kasus 1 : $\Delta(G-v) = \Delta(G)$

Dalam hal ini diperoleh $\chi(G-v) \leq \Delta(G) + 1$. Berarti semua titik di graph $G-v$ dapat diwarnai dengan $\Delta(G) + 1$ warna sedemikian hingga syarat pewarnaan terpenuhi. Karena banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai $N_G(v)$ di $G-v$ sebanyak-banyaknya $\Delta(G)$ Padahal ada pewarnaan $-(\Delta(G) + 1)$ di graph $G-v$, maka terdapat paling sedikit satu warna di $G-v$ yang tidak muncul pada $N_G(v)$ di G , sehingga warna tersebut dapat digunakan untuk mewarnai titik v di G . Diperoleh pewarnaan- $(\Delta(G) + 1)$ pada graph G . Akibatnya, berdasarkan definisi bilangan khromatik, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kasus 2 : $\Delta(G-v) < \Delta(G)$.

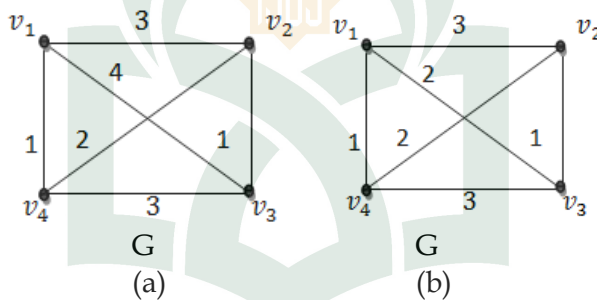
Berdasarkan asumsi $\chi(G-v) \leq \Delta(G-v) + 1$. Karena $\chi(G-v) \leq \Delta(G-v) + 1$ dan $\Delta(G-v) < \Delta(G)$, maka $\chi(G-v) < \Delta(G) + 1$ atau $\chi(G-v) \leq \Delta(G)$ (karena bilangan khromatik dari graph $G-v$ adalah bilangan bulat). Ini berarti ada pewarnaan- $\Delta(G)$ Pada graph $G-v$. Warnai titik v di G dengan warna (warna baru) selain warna yang muncul di graph $G-v$ sehingga diperoleh pewarnaan- $(\Delta(G) + 1)$ pada graph G . Dengan demikian, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Kegiatan Belajar 2

a. Materi Perkuliahan 8.2

Pewarnaan Sisi pada Graph

Kita awali bagian ini dengan pengertian pewarnaan sisi pada suatu graph. Sebuah **pewarnaan sisi** pada graph G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Sebuah pewarnaan sisi G dengan k buah warna tersebut sebuah **pewarnaan-sisi- k pada graph G** . Untuk selanjutnya pada bagian ini, pewarnaan sisi k diringkas penulisnya menjadi pewarnaan- k . Sebagai contoh pada Gambar 8.2.1. berikut diperlihatkan sebuah pewarnaan-4 (Gambar a) dan sebuah pewarnaan-3 (Gambar b) pada graph G .



Gambar 8.2.1 : (a) Sebuah pewarnaan-sisi-4 pada graph G
(b) Sebuah pewarnaan-sisi-3 pada graph G
Indeks Khromatik pada Graph

Misalkan G sebuah graph. Bilangan yang menyatakan minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi G yang terkait ke titik yang sama mendapat warna yang berbeda disebut **Indeks Khromatik Graph G** , dan dilambangkan dengan $\chi'(G)$. Dengan demikian, $\chi'(G) = \text{mimumin } \{k \mid \text{ada pewarnaan-sisi-}k \text{ pada } G\}$. Misalnya, graph G pada gambar 8.8 mempunyai indeks khromatik sama dengan 3, karena minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua sisi G adalah 3. Mudah ditunjukkan bahwa sikel dengan n titik, C_n , mempunyai indeks khromatik sama dengan :2 jika n genap, dan 3 jika

n ganjil. Begitu juga untuk graoh komplit dengan n titik, k_n , dan $x'(k_n) = n-1$ jika n genap dan $x'(k_n) = n$ jika n ganjil.

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa indeks khromatik sebuah graph sederhana selalu sama dengan derajat maksimumnya atau derajat maksimum ditambah satu. Namun sebelumnya kita perlu memahami konsep rantai kempe dan argumen rantai kempe pada pewarnaan sisi graph. Misalkan G adalah sebuah Graph yang semua sisinya dapat diwarnai dengan paling sedikit dua warna. Sebuah graph bagian G yang dibangun oleh semua sisi G yang berwarna i dan j , dengan $i \neq j$, dilambangkan dengan $H(i,j)$. Seperti sebelumnya, sebuah komponen dari $H(i,j)$ disebut sebagai *rantai kempe*. misalkan K sebuah rantai Kempe pada $H(i,j)$. Jika warna i dan warna j dipertukaran pada sisi-sisi K , sedangkan warna-warna sisi G yang lain tetap, maka akan diperoleh pewarnaan G yang baru dengan menggunakan warna-warna yang lama. Proses ini disebut *argumen rantai kempe*.

Teorema 8.2.1 : (Teorema Vizing)

Jika G graph sederhana maka $\Delta(G) \leq x'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Bukti :

Misalkan G graph sederhana dengan

$\Delta(G) = \Delta$ dan $v \in V(G)$ dengan $d(v) = \Delta$. Karena terdapat Δ sisi G yang terkait dititik v , maka untuk mewarnai semua sisi tersebut diperlukan sebanyak Δ warna. Sehingga $x'(G) \geq \Delta(G)$.

Untuk membuktikan $x'(G) \geq \Delta(G) + 1$, digunakan induksi pada $|E(G)| = m$. Untuk $m=0$, maka $\Delta(G) = 0$ dan $x'(G) = 0$. Sehingga $x'(G) = 0 \leq 0 + 1 = \Delta(G) + 1$. Asumsikan pernyataan benar untuk $|E(G)| = m - 1$. Akan ditunjukkan pernyataan benar untuk $|E(G)| = m$. Misalkan G graph sederhana dengan m sisi dan $e = uv$ sebuah sisi G . Maka graph $G_1 = G - e$ adalah graph sederhana dengan $m-1$ sisi. Berdasarkanasumsi,

$x'(G) \leq \Delta(G_1) + 1$. karena $\Delta(G_1) \leq \Delta(G)$, maka $x'(G_1) \leq \Delta(G) + 1$. ini berarti ada pewarnaan sisi $(\Delta(G) + 1)$ pada graph G_1 . Karena $d_{G_1}(u) \leq \Delta(G_1) \leq \Delta(G)$, maka ada paling sedikit satu warna dari $\Delta(G) + 1$ warna tidak muncul pada sisi-sisi G_1 yang terkait di titik u . Begitu juga karena $d_{G_1}(v) \leq \Delta(G_1) \leq \Delta(G)$, maka ada paling sedikit satu warna dari $\Delta(G) + 1$ warna tidak muncul pada sisi-sisi G_1 yang terkait di titik v .

Kasus 1 : warna yang tidak muncul di u dan v sama. Misalkan warna α tidak muncul di u dan v dalam pewarnaan $\Delta(G) + 1$ pada G_1 . Maka sisi e pada di graph G dapat diwarnai dengan menggunakan warna, sehingga diperoleh pewarnaan $\Delta(G_1) + 1$ pada graph G , akibatnya $x'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kasus 2 : warna yang tidak muncul di u berbeda dengan warna yang tidak muncul di v . Misalkan warna α tidak muncul di u dan warna β tidak muncul di v . Klaim bahwa ada sisi e_1 terkait dengan u di graph G_1 berwarna β . Sebab jika tidak, maka warna β tidak muncul di u , padahal β juga tidak muncul di v , kontradiksi. Dengan argumen yang sama dapat ditunjukkan bahwa ada sisi e_2 terkait dengan v di graph G_1 berwarna α . selanjutnya perhatikan graph bagian G_1 yang dibangun oleh sisi-sisi yang berwarna α dan β yaitu $H(\alpha, \beta)$. Kita tinjau dua subkasus.

Sub kasus 2.1 : sisi e_1 dan sisi e_2 terletak pada rantai yang berbeda.

Misalkan sisi e_1 terletak pada rantai Kempe K dan sisi e_2 terletak pada rantai kempe L . Terapkan argumen rantai kempe pada K , akibatnya warna β tidak muncul dititik u ; padahal warna β juga tidak muncul di titik v . Sekarang, warna β dapat digunakan untuk mewarnai sisi e pada graph G , sehingga diperoleh pewarnaan $\Delta(G) + 1$. dengan demikian $x'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Sub kasus 2.2 : sisi e_1 dan e_2 terletak pada rantai Kempe $H(\alpha, \beta)$ yang sama.

Misalkan rantai kempe K di $H(\alpha, \beta)$ memuat sisi e_1 dan e_2 . Maka ada lintasan dari titik u dan v di K pada graph G_1 . Misalkan ada sisi lain dari G_1 yang berwarna γ terkait dalam suatu titik internal lintasan tersebut, misalnya titik w . Putus rantai K apad titik w yang sisi terkaitnya dengan w berwarna α sehingga diperoleh $H(\alpha, \gamma)$, yang memuat rantai kempe baru, namakan L . Terapkan argumen rantai kempe pada L , sehingga warna α tidak muncul pada titik w . Perhatikan K sudah terputus pada pewarnaan baru, selanjutnya terapkan argumen rantai kempe pada K , maka warna β tidak muncul pada titik u , padahal warna β juga tidak muncul di v , sehingga warna β dapat digunakan untuk mewarnai sisi e pada graph G , akibatnya diperoleh pewarnaan sisi $\Delta(G) + 1$ pada graph G . Dengan demikian

$x'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Jika tidak ada sisi berwarna γ yang terkait, maka K berupa lintasan. Putus lintasan tersebut pada w , dan terapkan argumen rantai kempe pada rantai tersebut, maka warna β tidak muncul dititik u . Karena warna β juga tidak muncul pada titik v , maka warna β dapat digunakan untuk mewarnai sisi e pada graph G . Sehingga diperoleh pewarnaan sisi $\Delta(G) + 1$ pada graph G . Sedemikian sehingga $x(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Teorema 8.2.2 :

Jika G graph bipartisi dan tak kosong, maka $x'(G) = \Delta(G)$.

Pengklasifikasian Berdasar Indeks Khromatik Graph

Berdasarkan teorema 8.2.1 hanya ada 2 kemungkinan nilai dari indeks khromatik suatu graph sederhana yaitu : sama dengan derajat maksimumnya atau sama dengan derajat maksimum ditambah satu. Selanjutnya, graph G disebut graph kelas satu jika $x'(G) = \Delta(G)$, dan disebut graph kelas dua jika $x'(G) = \Delta(G) + 1$. misalnya, sikel dengan panjang genap adalah graph kelas satu, sedangkan sikel dengan panjang ganjil adalah graph kelas dua. Begitu juga graph komplit K_n adalah graph kelas satu untuk n genap dan untuk n ganjil K_n adalah graph kelas dua.

Berikut akan ditunjukkan, semakin banyak sisi suatu graph, maka cenderung graph tersebut terletak di kelas dua.

Teorema 8.2.3 :

Misalkan G graph dengan n titik, m sisi dan derajat maksimum Δ . Jika $m > \Delta \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ maka G adalah graph kelas dua.

Bukti :

Andaikan G bukan graph kelas dua, maka G adalah graph kelas satu, sehingga $x'(G) = \Delta(G) = \Delta$. ini berarti ada pewarnaan sisi Δ pada graph G . Jadi $E(G)$ dapat dipartisi menjadi Δ himpunan sisi-sisi independen. Setiap himpunan sisi independen tersebut memuat paling banyak $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ sisi G . Maka $m = |E(G)| \leq \Delta \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, kontradiksi dengan yang diketahui.

Aplikasi Pewarnaan Sisi pada Graph

Pikirkanlah suatu sistem jaringan komunikasi yang melibatkan sekumpulan sentra dan sekumpulan 'chanel' yang menghubungkan sentra-sentra tersebut. Untuk mengoperasikan sistem tersebut setiap chanel harus diberi frekuensi tertentu. Supaya tidak menjadi masalah, maka chanel-chanel yang bertemu di suatu sentra tertentu harus diberi frekuensi yang berbeda. Pertanyaannya adalah sebagai berikut, berapakah minimum banyaknya frekuensi yang diperlukan untuk mengoperasikan sistem komunikasi tersebut? Dalam hal ini, himpunan sentra komunikasi berkorespondensi dengan himpunan titik pada graph dan chanel yang menghubungkan dua sentra dipresentasikan dengan sisi graph. Frekuensi berkorespondensi dengan warna sisi pada graph. Menentukan minimum banyaknya frekuensi yang diperlukan, berkorespondensi dengan menentukan indeks khromatik pada graph yang mempresentasikan sistem komunikasi tersebut.

Salah satu kegunaan lain dari pewarnaan sisi pada graph, khususnya graph bipartisi adalah untuk mengkonstruksi bujur sangkar latin. Telah diketahui luas, bahwa bujur sangkar latin banyak digunakan dalam statistika, khususnya dalam membuat rancangan percobaan yang valid. Secara formal, definisi bujur sangkar latin adalah sebagai berikut : sebuah bujur sangkar latin order n adalah matriks bujur sangkar $n \times n$ yang entri-entrinya dilabel dengan bilangan-bilangan $1, 2, 3, \dots, n$ sedemikian hingga tidak ada sebuah bilangan muncul di lebih dari satu baris dan di lebih dari satu kolom. Sebagai contoh, bujur sangkar latin ordo 5×5 dapat dilihat sebagai berikut:

3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3
1	2	3	4	5

Bujur sangkar latin ordo $n \times n$ dapat dikonstruksi dengan menggunakan sebuah pewarnaan sisi n graph bipartisi komplet $K_{n,n}$. karena $\Delta(K_{n,n}) = n$, maka menurut teorema $\chi'(K_{n,n}) = n$. Sehingga ada pewarnaan sisi n pada graph $K_{n,n}$. Misalkan X, Y adalah bipartisi dari $K_{n,n}$ dan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ dan misalkan 1,

2,..., n adalah label-label warna. Definisikan matriks $A = (a_{ij})$ sebagai berikut,

$a_{ij} = k$ jika sisi $x_i y_k$ berwarna j (terkait dengan x_i). Maka untuk setiap dua indeks j_1 dan j_2 yang berbeda, $a_{ij_1} \neq a_{ij_2}$. hal ini menunjukkan bahwa setiap baris A mempunyai n entri yang berbeda. Lebih lanjut, jika $i_1 \neq i_2$, $a_{i_1 j} = a_{i_2 j}$ (katakan bernilai k), maka titik y_k merupakan titik ujung dua sisi G yang berwarna j , suatu kontradiksi. Sehingga setiap kolom A memuat n entri yang berbeda. Dengan demikian matriks A merupakan bujur sangkar latin ordo $n \times n$.

b. Latihan 8.2

1. Buktikan jika G graph bipartisi yang tak kosong, maka $\chi'(G) = \Delta(G)$
2. Misalkan G graph beraturan- k dengan banyak titik ganjil. Jika graph H dibentuk dari graph G dengan menghapus tidak lebih dari $1/2 k-1$ sisi, maka H adalah graph kedua. Buktikan!
3. Jika G dibentuk dari siklus C_{2k+1} dengan menambah tidak lebih dari $2k-2$ himpunan sisi independen, maka graph G adalah graph kedua. Buktikan!
4. Buatlah beberapa pewarnaan sisi-7 pada graph bipartisi komplit $K_{7,7}$, kemudian buatlah beberapa bujur sangkar latin yang bersesuaian dengan pewarnaan yang dibuat.

c. Rangkuman 8.2

1. Sebuah pewarnaan sisi pada graph G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Sebuah pewarnaan sisi G dengan k buah warna tersebut sebuah pewarnaan-sisi- k pada graph G .
2. Misalkan G sebuah graph. Bilangan yang menyatakan minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi G yang terkait ke titik yang sama mendapat warna yang berbeda disebut Indeks Khromatik Graph G , dan dilambangkan dengan $\chi'(G)$. Dengan demikian, $\chi'(G) = \text{mimumum } \{k / \text{ada pewarnaan-sisi-}k \text{ pada } G\}$.

d. Tes Formatif 8.2

1. Jelaskan pengertian pewarnaan sisi pada graph!
2. Jelaskan pengertian Indeks Khromatik Graph G !
3. misalkan G graph dengan n titik, m sisi dan derajat maksimum Δ .
Jika $m > \Delta \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor$ maka G adalah graph kelas dua.

e. Kunci Jawaban Tes Formatif 8.2

1. Sebuah pewarnaan sisi pada graph G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Sebuah pewarnaan sisi G dengan k buah warna tersebut sebuah pewarnaan-sisi- k pada graph G .
2. Misalkan G sebuah graph. Bilangan yang menyatakan minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi G yang terkait ke titik yang sama mendapat warna yang berbeda disebut Indeks Khromatik Graph G , dan dilambangkan dengan $\chi'(G)$. Dengan demikian, $\chi'(G) = \text{miminum } \{k / \text{ada pewarnaan-sisi-}k \text{ pada } G\}$.
3. **Bukti :**
andaikan G bukan graph kelas dua, maka G adalah grap kelas satu, sehingga $\chi'(G) = \Delta(G) = \Delta$. ini berarti ada pewarnaan sisi Δ pada graph G . Jadi $E(G)$ dapat dipartisi menjadi Δ himpunan sisi-sisi independen. Setiap himpunan sisi independen tersebut memuat paling banyak $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ sisi G . Maka $m = |E(G)| \leq \Delta \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, kontradiksi dengan yang diketahui.